Inspectoratul Şcolar Judeţean Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-18 februarie 2012

Clasa a IX a

Subiecte

1. Fie a, b, c $\in [0;1]$.Demonstraţi că $\frac{a}{7+b^2+c^3}+\frac{b}{7+c^2+a^3}+\frac{c}{7+a^2+b^3}\le\frac{1}{3}$.

Prof Petre Năchilă, Ploieşti

2. Fie $n\in N^*/\{1\}$ şi $1<d_1<d_2<...<d_k<n$ divizorii acestuia. Spunem că numărul *n* are proprietatea ”*p*” dacă există o progresie aritmetică $(a_n)_{n>0}$, neconstantă, de numere naturale, astfel încât $a_{d_1}+a_{d_2}+...+a_{d_k}=n$.

a. Să se arate că numărul 10 are proprietatea ”p” iar 15 nu are proprietatea ”p”.

b. Să se arate că există o infinitate de numere care au proprietatea ”*p*” şi o infinitate de numere care nu au proprietatea ”*p*”.

Prof. Marius Burtea, Alexandria

3. Fie ABC un triunghi şi $M\in \operatorname{int}\Delta ABC$ astfel încât $x\cdot\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overline{0}, x\in R^*$

a. Determinaţi x ştiind că M este mijlocul segmentului [AG],unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

b. Stabiliţi natura triunghiului ABC, în cazul în care M este centrul cercului înscris în triunghi.

Prof Vasile Stănescu , Ploieşti

4. Se consideră triunghiul *ABC* , *M* - mijlocul lui $[AB]$ şi punctele $D\in(BC), E\in(AC)$ astfel încât $\overrightarrow{BD}=k\cdot\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AE}=k\cdot\overrightarrow{EC}$. Fie $BE\cap DM=\{F\}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{EM}$ şi $\overrightarrow{CF}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă $k=3$.

Prof Claudiu Militaru, Ploieşti

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar Judeţean Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-18 februarie 2012

Clasa a X a

Subiecte

1. Determinaţi numerele reale *a, b* care verifică :

$$\begin{cases} 3^{a+b}+16=5^{a+b} \\ 3^{3(a-b)}+5^{2(a-b)}+5^{a-b}=3^{a-b+1}\cdot 5^{a-b} \end{cases}$$

Prof. Gabriel Necula, Plopeni

2. Fie *a, b* $\in (1;\infty)$.Rezolvaţi ecuaţia $(a^{\lg x}+b)^{\lg a}=x-b$, ştiind că a+b=10.

Prof Petre Năchilă, Ploieşti

3. Fie $z\in \mathbf{C}$. Dacă $|z+1+i|=2$, determinaţi z astfel încât $|z-2+5i|$ să aibă valoarea maximă, respectiv minimă.

Gazeta Matematică

4. Fie numerele $z_1, z_2,...z_n \in$ **C** de modul 2 astfel încât

$$z_1+z_2+...+z_n=[\operatorname{Re} z_1]+[\operatorname{Re} z_2]+...+[\operatorname{Re} z_n]=[\operatorname{Im} z_1]+[\operatorname{Im} z_2]+...+[\operatorname{Im} z_n]=0\,, n\geq 2$$

a. Determinaţi numărul elementelor mulţimii $A=\{z_k | 1\leq k\leq n\}$.

b. Arătaţi că $z_1\cdot z_2\cdot ...\cdot z_n$ este număr întreg **.**

Prof Emil Vasile, Ploieşti

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar Judeţean Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-18 februarie 2012

Clasa a XI a

Subiecte

1 Să se calculeze limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(n\pi\sqrt[3]{n^3+3n^2+4n-1}\right)$.

***

2. Fie matricele $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ care verifică relaţiile :

$A^2 - TrB\cdot C + \det C\cdot I_2 = 0_2$, $B^2 - TrC\cdot A + \det A\cdot I_2 = 0_2$ şi $C^2 - TrA\cdot B + \det B\cdot I_2 = 0_2$.

Să se arate că $A^{2012} = B^{2012} = C^{2012}$ (TrA reprezintă urma matricei A).

Prof. Gabriel Necula, Plopeni

3. Se consideră sirul $(x_n)_{n\geq 1}$ si $\alpha \in (0,\infty)$ astfel incat $x_1 > 0$ si $x_{n+1} = [x_n] + \left[\dfrac{\alpha x_n}{1 + x_n\sqrt{x_n}}\right], \forall n \geq 1$,

unde [a] reprezintă partea intreagă a lui a.

Să se arate că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Prof. Emil Vasile, Ploiesti

4. Fie matricea A $\in M_3\left(\left(0, \dfrac{1}{3}\right)\right)$.Dacă S(X) este suma elementelor matricei X.

a) Să se arate că: S(A^2) < S(A)

b) Demonstraţi ca sirul y_n= S(A^n) , $\forall n \geq 1$ este convergent si calculati $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Prof. Emil Vasile, Ploiesti

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar Judeţean Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-18 februarie 2012

Clasa a XII a

Subiecte

1. Să se calculeze $\int_{-1}^{1} \frac{1}{(3+x^2)(1+e^x)} dx$

Gazeta Matematică

2. Fie f : **R**→ **R** cu proprietatile:

i) f(x + 4)+f(x - 4) = f(x), $\forall x \in \mathbf{R}$

ii) $\int_{-8}^{16} f(x)dx = 12, \int_{0}^{4} f(x)dx = \frac{3}{4}.$

a) Să se calculeze $\int_{0}^{100} f(x)dx.$

b) Daţi un exemplu de funcţie cu proprietaţile i) si ii).

Prof. Petre Nachilă, Ploiesti

3. Determinaţi functiile $f, g, h : (0, \infty) \to (0, \infty)$ care admit primitivele F,G,H , astfel incat fg=H, hf=G , gh=F si F(2)=H(2)=G(2)=1.

Prof. Emil Vasile, Ploiesti

4. Pe mulţimea $\mathbf{R}_+^*$ se introduce legea $x * y = 2^{\sqrt[n]{\log_2^n x + \log_2^n y - 2^n}}$, unde *n* impar, $n \neq 1$.

Să se arate că:

a) $(\mathbf{R}_+^*, *)$ este grup abelian;

b) Grupul $(\mathbf{R}_+^*, *)$ este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale.

***

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10