100
2010
Anul Matematicii în
Şcoala Românească
www.anulmatematicii.ro

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova
Olimpiada de matematică
Etapa locală-13 februarie 2010
Clasa a V-a
Subiecte

1.Fie multimea A={3,7,11,...} cu elementele in ordine crescatoare si card A =100.
a) Este 231 element al multimii A?
b) Aflati cel mai mare element al multimii A.

G.M. 1/2009

2. Mulţimea M conţine toate numerele naturale, scrise în baza 10, de forma $\overline{abcd}$ cu proprietatea că suma S = 1 + 3 + 5 + ...+ $\overline{abcd}$ dă restul $\overline{abcd}$ la împărţirea cu 10^4.

Care este numărul minim de numere pe care trebuie să le scoatem din mulţimea M pentru a fi siguri că cel puţin unul este divizibil cu 3?

Prof. Gheorghe Bumbăcea, Buşteni

3. a) Aflati valoarea maximă a lui n, $n \in \mathbf{N}$, astfel incat $230^n \mid 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2010$

b) Sa se scrie numărul 230 ca sumă de trei pătrate perfecte.

c) Sa se scrie numarul 230^{2n+1}, $n \in \mathbf{N}$, ca suma de trei pătrate perfecte si ca sumă de patru pătrate perfecte.

Prof.Viorica Preda, Prof.Adelina Apostol- Ploiesti

4. a)Sa se determine numarul numerelor de doua cifre cu proprietatea ca suma resturilor impărtirii fiecarui numar la 4, respectiv 6, este 6.

b)Sa se determine suma acestor numere.

Prof. Petre Nachila , prof.Catalin Nachila-Ploiesti

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova
Olimpiada de matematică
Etapa locală-13 februarie 2010
Clasa a VI- a
Subiecte

1. Andrei vine la bazinul de înot la fiecare două zile. Roxana vine la fiecare cinci zile.Cristina vine la fiecare opt zile. Astăzi este sâmbătă şi au venit toţi trei.

a) În ce zi a săptămânii se vor întâlni, pentru prima oară, iarăşi cei trei: Andrei, Crisina şi Roxana?
b) Este posibil ca în timp de un an de zile să se mai întălnească toti trei tot într-o sâmbătă?Justificati răspunsul.

Prof. Ioana Crăciun şi prof.Gheorghe Crăciun, Ploieşti

2.Fie d o dreapta si A si B doua puncte fixe , de o parte si de alta a dreptei d. Spunem ca un punct M $\in$d are proprietatea p daca [AM] $\equiv$[MB].Demonstrati ca daca pe dreapta d exista doua puncte cu proprietatea p, atunci toate punctele dreptei au proprietatea p.

G.M. 4/2009

3. Aflati a$\in$**N** stiind că c.m.m.d.c. al numerelor 5a+13 si 3a+5 este a+1

Prof. Gh. Achim , Mizil

4.Să se găsească numerele naturale a, b, c ştiind că au suma 120 şi sunt direct proporţionale cu trei numere prime consecutive.

Prof. Tatiana Pană-Ploiesti

SUCCES!

Notă:
Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-13 februarie 2010

Clasa a VII a

Subiecte

1. Fie *n* un număr întreg negativ şi E(*x*) = *x* + 3.Determinaţi valorile întregi ale lui *n* pentru care $3\sqrt{3} - E(n)$ > 3- $E(n\sqrt{3})$.

Prof. Maria şi Anton Negrilă, Ploieşti

2. Dacă *a, b, c* $\in$ **Q** astfel încât *ab*+*bc*+*ca* = 2010, arătaţi că

$$\sqrt{\left(2010+a^2\right)\left(2010+b^2\right)\left(2010+c^2\right)} \in \mathbf{Q}$$

Prof. Gheorghe Achim, Mizil

. **3.** Fie ABC un triunghi echilateral ABC, D $\in$ BC astfel încât [DC]$\equiv$[BC] si E $\in$ AC astfel încât [AE] $\equiv$[AC] .Dacă DE$\cap$ AB = $\{F\}$, arătaţi că AB=3AF.

Gazeta Matematică 2009

4. Mediana [BM] (M$\in$AC) a triunghiului ascuţitunghic ABC întâlneşte paralela prin C la AB în E, iar mediana [BF] (F$\in$EC) a triunghiului BCE intersectează pe AC în N.

a) Demonstraţi că AECB este paralelogram.

b) Determinaţi raportul dintre aria triunghiului MNF şi aria paralelogramului AECB.

Magdalena-Maria Georgescu, Mihail Focşeneanu, Ploieşti

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-13 februarie 2010

Clasa a VIII a

Subiecte

100
2010
Anul Matematicii în
Şcoala Românească
www.anulmatematicii.ro

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $4m^2+4n= n^2+4m+11$.

Gazeta Matematică, 2009

2. Arătaţi că numărul a= 9002010•9002011•9002012•9002013 + 1 este pătrat perfect.

Prof . Petre Burduşel, Ploieşti

3. Fie ABCDEF un hexagon regulat de latură *a*, iar $M\notin(ABC)$ situat pe mediatoarea segmentului [EC] astfel încât distanţa de la M la EF este ME=*a*.Calculaţi distanţa de la M la planul (ABC) şi distanţa de la M la dreapta AE.

Prof Ion Tomescu, prof Ion Lupea

4. În ΔABC isoscel $(AB = AC)$ punctul *M* este mijlocul medianei $[AQ]$, $Q\in(BC)$ iar $AQ = BC = 12cm$. Se notează cu P şi *R* respectiv centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor *ABM* şi *ACM*. Pe perpendiculara în *M* pe planul (ABC) se ia punctul *S* astfel încât $SM = 3cm$.

a) Demonstrati ca PR || BC.

b) Aflaţi măsura unghiului format de planele (SPR) şi (ABC).

c) Aflaţi distanţa de la M la planul (SQR).

Prof. Silvia şi Ionel Brabeceanu, Plopeni

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-13 februarie 2010

Clasa a IX a

Subiecte

1. Fie numerele reale pozitive $a_1, a_2, a_3, ..., a_{20}$ astfel încât

$a_1 + a_2 = 4, a_2 + a_3 = \frac{4}{3}, a_3 + a_4 = \frac{4}{5}, a_4 + a_5 = \frac{4}{7}, ..., a_{19} + a_{20} = \frac{4}{37}$ şi

A = $\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} + \frac{a_2 + a_3}{a_2 a_3} + \frac{a_3 + a_4}{a_3 a_4} + ... + \frac{a_{19} + a_{20}}{a_{19} a_{20}}$. Demonstraţi că $\sqrt{A}$ > 19.

Prof Nicolae Radu,Ploieşti

2. Rezolvaţi ecuaţia:

$[x^2 - 4x + 4] = [-2x^2 + 8x - 6]$.

Prof. Petre Năchilă , prof Cătălin Năchilă,Ploieşti

3. Fie ABCDEF un hexagon convex oarecare, G_1,G_2 centrele de greutate ale ΔACE, ΔBDF, H_1,H_2 ortocentrele ΔACE, ΔBDF şi G punctul din planul hexagonului cu proprietatea că $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$.

a) Arătaţi că $\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1E} = \vec{0}$.

b) Arătaţi că $\overrightarrow{G_1G}$ şi $\overrightarrow{G_2G}$ sunt vectori coliniari.

c) Dacă hexagonul are toate vărfurile pe un cerc aratati că $\overrightarrow{G_1G} = \frac{1}{6}\overrightarrow{H_1H_2}$.

prof. Leu Gabriela , Sinaia

4. Fie triunghiul ABC , M - mijlocul lui $[BC], D \in (AB)$, $E \in (AC)$, $DE \cap AM = \{N\}$.

Demonstraţi că:

a) daca N este mijlocul lui $[DE]$, atunci vectorii $\overrightarrow{DE}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.

b) daca N este mijlocul lui $[AM]$ si $2DB = 3DA$, atunci vectorii $\overrightarrow{ME}$ şi $\overrightarrow{BN}$ sunt coliniari.

Prof . Claudiu Militaru, Ploieşti

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-13 februarie 2010

Clasa a X a

Subiecte

100
2010
Anul Matematicii în Şcoala Românească
www.anulmatematicii.ro

1. Demonstraţi inegalitatea $\log_3(1+a+b)\cdot\log_3(1+b+c)\cdot\log_3(1+c+a)\le 1$,
ştiind că a, b, c >0 şi a + b + c = 3.

Prof. Doinaru Mihaiela, Sinaia

2. Rezolvaţi ecuaţia : $x+\sqrt{2^x(x+1)}=\sqrt{x+1}$.

Prof Necula Gabriel, Plopeni

3. Fie n un număr întreg.

a) Dacă r este restul împărţirii lui n^3 la 9, arătaţi că $r\in\{0,1,8\}$.

b) Demonstraţi că [$\sqrt[3]{9n+1}$] = [$\sqrt[3]{9n+7}$], unde [*x*] reprezinta partea întreagă a numărului real *x*.

Prof Cezar Apostolescu , Ploieşti

4. Fie $(z_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere complexe de acelaşi modul, cu proprietatea că $z_k^2=z_{k-1}\cdot z_{k+1}$, $\forall$ k $\geq$ 2.Ştiind că cel puţin trei termeni ai şirului sunt numere reale, arătaţi că mulţimea termenilor şirului este finită.

Gazeta Matematică 2009

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova
Olimpiada de matematică
Etapa locală-13 februarie 2010
Clasa a XI-a
Subiecte

1. Fie sirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0>0$, $x_1+x_2+...+x_n=\frac{1}{\sqrt{x_{n+1}}}, n\geq 0$. Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2x_n^3$

G.M.4/2009

2.Fie sirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu proprietatile :
a) $a_n>0$, $\forall n\in\mathbf{N}$
b) $a_{n+1}^2\cdot a_n^2=27+2a_{n+1}\cdot a_n^2$, $\forall n\in\mathbf{N}$ Sa se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=3$

Prof. Octavian Purcaru-Ploiesti

3.Pentru fiecare numar natural considerăm matricea de ordinul 3 :

$$A_n=\begin{pmatrix} 2^{[\sqrt{n+1}]} & 2^{[\sqrt{n+2}]} & 2^{[\sqrt{n+3}]} \\ 2^{[\sqrt{n+4}]} & 2^{[\sqrt{n+5}]} & 2^{[\sqrt{n+6}]} \\ 2^{[\sqrt{n+7}]} & 2^{[\sqrt{n+8}]} & 2^{[\sqrt{n+9}]} \end{pmatrix}$$

.Sa se arate ca exista $k\in\mathbf{N}$ astfel incat $\forall n\geq k$, $n\in\mathbf{N}$, matricea A_n nu este inversabila (am notat cu [a] –partea intreagă a lui a).

Prof.Emil Vasile -Ploiesti

4. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & \varepsilon^2 b \\ b & a \end{pmatrix}$ $a,b,\varepsilon\in\mathbf{C}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $si\ n\in\mathbf{N}^*$

a) Sa se demonstreze că : $A^n=\begin{pmatrix} \frac{(a+b\varepsilon)^n+(a-b\varepsilon)^n}{2} & \frac{(a+b\varepsilon)^n-(a-b\varepsilon)^n}{2}\varepsilon \\ \frac{(a+b\varepsilon)^n-(a-b\varepsilon)^n}{2\varepsilon} & \frac{(a+b\varepsilon)^n+(a-b\varepsilon)^n}{2} \end{pmatrix}$

b) Sa se calculeze B^n
c) Sa se rezolve in $M_2(\mathbf{C})$ ecuatia $X^n=B$

Prof. Cezar Apostolescu-Ploiesti

SUCCES!

Notă:
Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

100
2010
Anul Matematicii în
Şcoala Românească
www.anulmatematicii.ro

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova
Olimpiada de matematică
Etapa locală-13 februarie 2010
Clasa a XII-a
Subiecte

1. Calculati : a)$I_1 = \int \frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{x^4+2x^3+x^2+2x+1}}$, $x \in (0,+\infty)$.

Prof. Gabriel Necula - Plopeni

b) $I_2 = \int \frac{9x^3+9mx^2+(18+2m^2)x+12m}{\left(3x^2+2mx+5\right)^n}dx, x \ge 0, m \ge 0, n \in N^*$, $n \ge 3$

Prof. Doinaru Mihaiela-Sinaia

2. Se consideră sirurile :

$I_n = \int_{-a}^{a} \sin^2 nx \cdot \ln \frac{2a+x}{2a-x}\, dx$ si $K_n = \int_{0}^{a} \sin^2 nx \cdot \ln \frac{2a+x}{2a-x}\, dx$, unde a>0, fixat, $n \in \mathbf{N}^*$

a) Sa se arate că $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$

b) Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty} K_n$

Prof. Octavian Purcaru-Ploiesti

3. Fie A un inel cu proprietatea că daca $x \in A$ si $x^2=0$, atunci x=0.Fie $a,b,c \in A$, astfel incat a=ab, b=bc, c=ca. Sa se arate ca a=b=c.

G.M.9/2008

4. Pe **R** se defineste legea de compozitie $x \circ y = xy - ax - ay + a^2 + a$, $a \in \mathbf{R}$.

a) Determinati $\alpha, \beta \in R$ pentru care intervalul $[\alpha, \beta]$ este parte stabilă in raport cu legea si pentru care $\beta - \alpha$ este maxim ;
b) Pentru α, β determinati la punctul a), aflati multimile $H \subset [\alpha, \beta]$ astfel incat $(H, \circ)$ grup .

Prof. Militaru Claudiu –Ploiesti

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10