Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-24 ianuarie 2009

Clasa a V a

Subiecte

1.Demonstrati ca suma dintre $\overline{abcde}$ si $\overline{edcba}$ are cel putin o cifra para.

Prof .Moldoveanu Calin Dragos , Sinaia

2.Suma a patru numere naturale este 626.Impartindu-le prin acelasi numar natural nenul, se obtin caturile numere naturale consecutive si resturile 1,2,3 respectiv 4.Aflati numerele.Cate solutii are problema?

Prof. Maria si Anton Negrila , Ploiesti

3.Aratati ca exista o infinitate de numere naturale pentru care jumatatea si dublul lor sunt numere naturale patrate perfecte, iar sfertul lor este numar natural cub perfect.Care este cel mai mic numar natural cu aceasta proprietate?

Prof. Tomescu Ion, Mizil;
Prof Lupea Ion , Ploiesti

4.In scoala noastra jumatate dintre elevi sunt baieti. Jumatate dintre elevi sunt inscrisi la ciclul primar iar restul la ciclul gimnazial. Aratati ca numarul de baieti de la gimnaziu este egal cu numarul de fete din ciclul primar.

Prof.Ioana Craciun si Gheorghe Craciun, Ploiesti

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-24 ianuarie 2009

Clasa a VI- a

Subiecte

1.Aflati numerele $\overline{xy}$ *si* $\overline{zt}$ stiind ca $\overline{xy}(\overline{zt}+1)=\overline{zt}+2010$

Prof. Gh. Achim , Mizil

2.Fie A= $\left\{\frac{1}{n}\ \middle|\ n\in N^*, n\geq 2\right\}$

a) Calculati : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$.
b) Scrieti numarul 1 ca suma a 12 elemente din multimea A.
c) Numarul 1 poate fi scris ca suma de elemente din A , avand numitorii numere prime?

Prof. Dragos Moldoveanu, Sinaia

3. Fie m, n$\in N^*$, m < n astfel incat (m,n)=1 si fractia $F=\frac{4n-m}{3n+4m}$ este reductibila. Prin ce numar se simplifica fractia F ?

Prof. Petre Nachila si Catalin Nachila

4. Fie M_1 mijlocul segmentului [AB], M_2 mijlocul segmentului [AM_1] , M_3 mijlocul segmentului [AM_2], …, M_n mijlocul segmentului [AM_{n-1}] . Daca AM_n =1, calculati S=AM_n +AM_{n-1} +….+AM_3 +AM_2 +AM_1. Aflati n daca S=127.

Prof. Ion Tomescu si Ion Lupea

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-24 ianuarie 2009

Clasa a VII a

Subiecte

1. a) Verificaţi că $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\geq\frac{1}{2}$

b) Arătaţi că :

$$\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\left(1-\frac{1}{3^k}\right)\left(1-\frac{1}{4^k}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2009^k}\right)\geq\frac{1}{2}$$ **,** pentru orice $k\geq 2$.

Prof .Samuel Ioniţă , Bărcăneşti

2. Numerele naturale nenule a, b şi numărul real x verifică relaţia $x=\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\sqrt{a}+b}$

a) Arătaţi că $\sqrt{a}-\sqrt{b}=1$

b) Demonstraţi că x este număr iraţional.

Prof.Gh.Bumbăcea, Buşteni

3. În triunghiul ABC, $M\in(AB)$, F şi $G\in(CM)$ astfel încât $BM=3AM$, $CF=FG=GM$ iar $AF\cap BC=\{D\}$, $AG\cap BC=\{E\}$.

a) Demonstraţi că triunghiurile AGF si EGM sunt congruente.
b) Arătaţi că $BE=6CD$.

Prof. Silvia şi Ionel Brabeceanu, Plopeni

4. Fie ABCD trapez dreptunghic cu AB || CD şi AB < CD , AC $\perp$ BD şi m($\angle$BDC)= 60^0 .

a). Demonstraţi că CD = 3AB;

b). Fie O intersecţia diagonalelor trapezului.Dacă P este simetricul lui D faţă de O şi S este mijlocul segmentului [AC] ,atunci dreapta PS împarte triunghiul BOC în două suprafeţe de arii egale.

Prof .Elena Tudor , Sinaia

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-24 ianuarie 2009

Clasa a VIII a

Subiecte

1. Fie expresia E(x) = $x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2$.

a) Arătaţi că E(x) ≥ 0 , oricare ar fi $x \in$ **R.**

b) Determinaţi a $\in$ **Z** astfel încât E(a) să fie pătrat perfect.

***

2. Să se determine x, y, z numere întregi ştiind că

$9x^2 + 25y^2 + 225z^2 \leq 675$ şi $xy + 3xz + 5yz = 75$

Prof. Silvia şi Ionel Brabeceanu, Plopeni

3. Dreptunghiul ABCD şi triunghiul ABE cu AE=13cm, AB=14cm,EB=15cm şi BC =12cm ,sunt situate în plane diferite .Dacă H este ortocentrul triunghiului ABE si EH $\perp$BC ,aflaţi distanţa de la H la (EDC).

Prof. Ion Tomescu , Ion Lupea

4. In cubul ABCDA'B'C'D' se consideră un punct T un punct pe (AO) unde O este centrul fetei BCC'B' . Aflati unghiul dintre dreptele D'B si B'T.

Prof Ioana Craciun si Gheorghe Craciun ,Ploiesti

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-24 ianuarie 2009

Clasa a IX a

Subiecte

1. a) Demonstraţi că dacă produsul a două numere pozitive este constant,atunci suma lor este minimă când numerele sunt egale.

b) Formaţi o progresie aritmetică cu ***n*** termeni pozitivi ştiind că produsul dintre primul termen şi raţie este ***a*** ,iar suma celor ***n*** termeni ai progresiei este minimă.

***

2. Sa se rezolve sistemul :

$$a[a] + c\{c\} - [b]\{b\} = 0{,}16$$

$$4b[b] + 4a\{a\} - 4[c]\{c\} = 1$$

$$c[c] + b\{b\} - [a]\{a\} = 0{,}49$$

unde $[x], \{x\}$ reprezinta partea intreaga respectiv partea fractionara a numarului real x.

Prof Gabriel Necula ,Plopeni

3. Fie triunghiul ABC si punctele D-piciorul bisectoarei din A, I_1 si I_2- centrele cercurilor inscrise in triunghiurile ABD respectiv ACD. Se stie ca $BC = 12$, $AD = 8$ si $I_1I_2 \parallel BC$.

a) Demonstrati ca $AB = AC$;

b) Daca $\overrightarrow{AI_1} = \vec{u}$ si $\overrightarrow{AI_2} = \vec{v}$, exprimati $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{AC}$ in functie de $\vec{u}$ si $\vec{v}$.

Prof Claudiu Militaru ,Ploiesti

4. În triunghiul ABC se consideră punctele D,E , F –mijloacele laturilor AB,BC,AC şi M$\in$(BE) ,N$\in$(CE) .

Arătaţi că AE, DM , FN sunt concurente dacă si numai dacă $\frac{BM}{ME} = \frac{CN}{NE} \neq 1$.

Prof. Ion Nedelcu ,Ploiesti

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-24 ianuarie 2009

Clasa a X a

Subiecte

1. Rezolvaţi în $\mathbf{R}_{+}\times\mathbf{R}_{+}$ sistemul de ecuaţii :

$$\begin{cases} x^{2009} - y^{2009} = \log_{2009}\dfrac{y}{x} \\ x^2 - xy + y^2 = 2009 \end{cases}$$

Prof Coman Vasile ,Vălenii de Munte

2. **a)** Fie x,y,z ,t $\in$ $(1;\infty)$astfel încât $x^3 > yzt$. Să se demonstreze că

$\lg^3 x > (\lg y)(\lg z)(\lg t)$.

b) Generalizaţi rezultatul de la a)

Prof . Petre Năchilă ,Cătălin Năchilă , Ploiesti

3. Fie $m,n \in$ **N*,**$m>n$ şi funcţia f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = n2^{mx} - m2^{nx}$. Arătaţi că :

a) $f(x) \geq f(0)$,oricare ar fi $x\in$ **R.**

b) Funcţia *f* este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty;0]$ şi strict crescătoare pe intervalul $[0;\infty)$.

Prof Cezar Apostolescu, Ploieşti

4. Fie $z\in$ **C*** astfel încât $\left[\log_2|z|\right]+\left[\log_2|z+1|\right] = 0$.,unde $[x]$ este partea întregă a numărului *x*.

a. Determinaţi o soluţie a ecuaţiei.

b. Determinaţi valorile posibile pentru $\left[|z|\right]$.

c. Să se arate că $|\operatorname{Im} z| \leq \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

Prof. Emil Vasile , Ploiesti

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-24 ianuarie 2009

Clasa a XI- a

Subiecte

1.Se considera sirul $(a_n)_{n\ge1}$ cu $a_1=\sqrt{10}$, $a_2=\sqrt{20}$ si $a_{[a_n]}=\dfrac{3a_n+2[a_n]+11}{5}$, $\forall n\ge1$

unde $[x]$ = partea intreaga a numarului real x .

a)Calculati a_3 si a_4

b)Sa se studieze convergenta sirului $(a_n)_{n\ge1}$

c) Sa se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$.

Prof. Militaru Claudiu , Ploiesti

2.Fie $f_1, f_2 : R\to R$ $functii\ periodice\ de\ perioade T_1\ respectiv\ T_2\ astfel\ incat:$

$$\lim_{x\to0}\frac{f_1(x)}{x}=l_1\in R\ \ si\ \ \lim_{x\to0}\frac{f_2(x)}{x}=l_2\in R^*$$

a)Sa se arate ca $(3+\sqrt7)^n+(3-\sqrt7)^n=k_n\in Z$

b)Sa se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_1((3+\sqrt7)^n\cdot T_1)}{f_2((2+\sqrt2)^n\cdot T_2)}$

Prof. Popa Dumitru , Valenii de Munte

3.Fie $n\in N^*$ si $A,B\in M_n(C)$ inversabile. Sa se arate ca:

a)Daca $AB^{-1}=I_n+BA^{-1},\ atunci\ \det(A-B)\ne0$;

b)Daca $BA^{-1}=I_n+AB^{-1},\ atunci\ \det(A+B)\ne0$.

Prof . Ion Nedelcu, Ploiesti

4.Fie matricele X=$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ si Y=$\begin{pmatrix}a & 0\\ a & 1\end{pmatrix}$, a$\in C$.

a) Demonstrati ca (XY-YX)^2=I$_2$

b) Fie A,B$\in M_2(C)$ astfel incat (AB-BA)^n=I$_2$, n$\in N$. Demonstrati ca n este par.

c) Fie A,B$\in M_n(C)$ astfel incat (AB-BA)^2= I_n . Demonstrati ca n este par.

Prof. Dorin Vasile, Ploiesti

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-24 ianuarie 2009

Clasa a XII- a

Subiecte

1.Fie (G, $\cdot$) un grup finit cu n elemente , n≥ 3, cu proprietatea: $\forall x \in G, \exists y \in G$ astfel incat x=y^2.

a) Demonstrati ca n este impar.
b) Demonstrati ca grupul (Z$_n$,+), cu n impar, are proprietatea de mai sus.

Prof. Dorin Vasile, Ploiesti

2.Spunem ca o functie f are proprietatea „P" daca f continua pe [a,b] si

$\forall c \in (a,b),\ \exists u, v \in [a,b], u \neq v$ astfel incat $\int_u^v f(x)dx = (v-u)f(c), unde\ a,b \in R, a < b\ fixati$

a)Pentru a=0 si b=2 aratati ca f(x)= xe^{-x} nu are proprietatea „P"

b)Sa se demonstreze ca orice functie continua pe [a,b] care admite o primitiva convexa pe [a,b] are proprietatea „P".

Prof. Octavian Purcaru, Ploiesti

3.Fie functiile $f\ ,F : [0,\infty) \to [1,\infty),\ F(0)=1,\ [F(x)] = [f(x)],\ \forall x \geq 0$ si F este o primitiva a functiei f.([a]-partea intreaga a lui a)

a)Sa se arate ca exista o functie f cu aceste proprietati;
b)Demonstrati ca F este bijectiva;
c)Calculati $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{F^{-1}(x)}{\ln x}$

Prof. Emil Vasile, Ploiesti

4.Fie $n \in N^*$ Sa se calculeze : $\int \dfrac{x^{3n-1} + x^{n-1}}{x^{4n} - x^{2n} - 1} dx,\ x \in R$

Prof . Ion Nedelcu, Ploiesti

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10