Examen de admitere la programul Master
Algebră şi teoria numerelor
20 Iulie 2010

1. (a) Enunţaţi rezultatul privind descompunerea unei permutări ca produs de cicluri disjuncte.
(b) Demonstraţi că un ciclu de lungime m într-un grup de permutări S_n are ordinul m.
(c) Fie permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 6 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in S_8$$

Să se descompună σ în produs de cicluri disjuncte şi să se calculeze signatura şi ordinul lui σ.

2. (a) Definiţi conceptul de morfism de inele.
(b) Să se arate că dacă $f : R \to S$ este morfism de inele, atunci $\mathrm{Ker}(f)$ este ideal în R şi $\mathrm{Im}(f)$ este subinel al lui S.
(c) Enunţaţi teorema fundamentală de izomorfism pentru inele.
(d) Arătaţi că există un izomorfism de inele $\mathbf{Z}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbf{Z}[i]$.

3. (a) Definiţi conceptele de bază şi dimensiune pentru un spaţiu vectorial finit generat.
(b) Fie $V = \{(a+b, b-a, b, a+b) |\ a, b \in \mathbf{R}\}$. Să se arate că V este subspaţiu vectorial al $\mathbf{R}$-spaţiului vectorial $\mathbf{R}^4$ şi să se determine o bază a lui V.
(c) Fie X şi Y două subspaţii vectoriale ale unui spaţiu vectorial finit generat U, astfel încât $X \cap Y = 0$ şi $X + Y = U$. Să se arate că $\dim(X) + \dim(Y) = \dim(U)$.