

TESTAREA PENTRU CLASA DE EXCELENTA

30 octombrie 2010

clasa a 9 a

1) Demonstrati inegalitatile:

a) $a + b + c - abc \leq 2, \forall a, b, c \in [0, 1]$

b) $\frac{b+c}{b+c-a} + \frac{c+a}{c+a-b} + \frac{a+b}{a+b-c} \geq \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$, in orice
triunghi de laturi a, b, c .

2) Determinati multimea perechilor (x, y) de numere reale, pentru care
 $xy = (x-1)(y-1)(x-2)(y-2)$.

3) Fie punctele D si E oarecare pe laturile AC respectiv AB ale
triunghiului ABC. Segmentele BD si CE se intersecteaza in punctul K.
Se stie ca ariile triunghiurilor EKB, BKC, DKC sunt respectiv 5, 6, 7.
Determinati aria patrulaterului ADKE.

4) Intr-o incapere sunt 6 persoane. Demonstrati ca printre acestea se
afla cel putin doua cu acelasi numar de prieteni in acea camera.

5) a) Daca $a + b \in \mathbb{Q}$ si $a - b \in \mathbb{Q}$, dem ca $a, b \in \mathbb{Q}$.

b) Daca $a, b, \sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}^*$, dem ca $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

c) Daca $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ si $xy, xz, yz \in \mathbb{Q}$, demonstrati ca $x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{Q}$.
Daca in plus $x^3 + y^3 + z^3 \in \mathbb{Q}$, demonstrati ca $x, y, z \in \mathbb{Q}$.