# PROBLEME PROPUSE PENTRU CICLUL GIMNAZIAL [2)]

## Clasa a V-a

**1.** Aflaţi elementele x;y şi determinaţi mulţimile A şi B ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile: **a.** $A \cup B = \{2;3;4;5;6\}$;
**b.** $A \cap B = \{2;3;x\}$;
**c.** $B - A = \{y;5\}$.

*Laura Radu, Rădeşti, Argeş*

**2.** Arătaţi că suma tuturor numerelor de 5 cifre, care prin împărţire la 2005 dau restul egal cu câtul, este divizibilă cu 243.

*Gh. Achim, Mizil*

**3.** 

Veveriţele Chip şi Dale strâng alune. Chip depozitează alunele în cutii identice iar Dale în borcane identice. 30 de cutii pline conţin tot atâtea alune cât 70 de borcane pline.În timp ce Chip strânge 60 de cutii pline, veveriţa Dale strânge 90 borcane pline. Dale strânsese deja 600 borcane pline cu alune când a început şi Chip să strângă alune. Câte cutii trebuie să strângă Chip pentru a avea aceeaşi cantitate de alune ca şi Dale dacă veveriţa Dale nu face pauză?

*Ioana Crăciun şi Gheorghe Crăciun, Ploiesti*

**4.** Aflaţi toate cifrele a şi b astfel încat $a^b = b^a$.

*Luminita Corneci, Vălenii de Munte*

**5.** Dacă $z \le y \le x$ rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia

$$3 \cdot 2^x + 17 \cdot 2^y - 3^4 = 2000 - 2^z$$

*Daniela Badea, Ploieşti*

**6.** Aflaţi două numere ştiind că suma lor este 165 iar dacă pe primul îl împărţim la al doilea obţinem câtul 3 şi restul 5.

*Nicolae Scuratovschi, Constanţa*

**7.** Determinaţi numărul prim p ştiind că numărul $a = p^5 + 41$ este număr prim.

*Dan Coma, Vădăstriţa, Olt*

**8.** Precizaţi dacă numărul $A = \dfrac{2^{2010} + 2^{2009}}{3} + \dfrac{2^{2011} + 2^{2010}}{6}$ este pătrat perfect.

*Mariana Mitea, Cugir*

**9.** Determinati numărul natural ,care împărţit la 51 dă un cât si restul 24, iar împărţit la 53 dă acelaşi cât şi restul 0.

*Eugen Niţă, Ploieşti*

**10** Fie numărul $A = \overline{888...88k99...999}$ în care cifrele 8 şi 9 se repetă de câte 50 de ori fiecare.
**a.** Arătaţi că numărul 111111 este divizibil cu 7.
**b.** Aflaţi cifra $k$ pentru care numărul $A$ este divizibil cu 7.

*Florin Smeureanu, Rm. Vâlcea*

**11.** Câte numere de forma $\overline{abcabc}$ divizibile cu 35 există ,ştiind că cifrele a,b şi c sunt distincte?

*Adelina Monica Apostol, Ploieşti*

2) **Se primesc soluţii până la25 iunie 2011**

1. **Clasa a VI-a**

Să se găsească numerele naturale a şi b, ştiind că $a^2 - 2b^2 = 175$ şi $[a\, ;\, b] = 15$.

*Liviu Ardelean, Sibiu*

2. Pe dreapta OM luăm, în acelaşi sens, punctele: $A_1$ de două ori mai depărtat de O decât M, $A_2$ de trei ori mai depărtat de O decât M, $A_3$ de patru ori mai depărtat de O decât M etc. Aflaţi lungimea segmentului [OM], ştiind că lungimea lui [OM] este număr natural şi $OA_1 + OA_2 + OA_3 + ... + OA_n = 45\ cm$.

*Liviu Ardelean, Sibiu*

3. Maşina A produce 2 010 şuruburi în 5 minute. Maşina B produce 2011 şuruburi în 3 minute. Câte piese produc împreună cele două maşini în 30 minute?

*Emanuel Matei, Piteşti*

4. Să se arate că nu există nici un număr natural care prin împărţire la 25 să dea restul 15 iar prin împărţire la 15 să dea restul 6.

*Ioana Crăciun şi Gheorghe Crăciun, Ploieşti*

5. În $\Delta$ ABC se iau pe latura (BC) punctele D şi E astfel încât m($\angle$ BAE) = m($\angle$ EAD) = m($\angle$ DAC) = m($\angle$ BCA) = $x$.
   a) Dacă AE $\perp$ BC calculaţi măsurile unghiurilor $\Delta$ ABC;
   b) Dacă $x = 36^0$ arătaţi că AB + AC = BC + ED.

*Daniela Badea, Ploieşti*

6. Fie $\Delta$ABC dreptunghic isoscel cu [AB]≡[AC] şi AD⊥BC, D∈BC; se duce MN ∥ AC, M∈AD şi N∈BC. Arătaţi că:
   a) BM⊥AN;
   b) [BM]≡[AN].

*Mariana Mitea, Cugir*

7. Se dă numărul A=1+2+3+...+2011+2012+2011+2010+...+1.
Precizaţi dacă numărul $\dfrac{A}{503^2}$ este pătrat perfect.

*Mariana Mitea, Cugir*

8. Considerăm mulţimea $A = \{5x + 7 \mid x, y \in N\}$.
   a)Arătaţi că 17m+19n+60 ∈ A, oricare m,n ∈ N.
   b)Arătaţi că 2011 ∈ A.

*Dan Coma, Vădăstriţa, Olt*

9. Aflaţi n ∈ $N$, ştiind că numărul $a = 7^{2011} + 8^{2011} + 5^n$ nu se divide cu 10.

*Dan Coma, Vădăstriţa, Olt*

10. Fie x , y , z măsurile a trei unghiuri in jurul punctului O şi a , b , c măsurile unghiurilor formate de bisectoarele lor ; verificaţi urmatoarele afirmaţii :
**a.**Dacă a , b , c sunt direct proporţionale cu 3 , 4 , 5 , atunciy , x , z sunt direct proporţionale cu trei numere consecutive.
**b.**Printre unghiurile date există unul alungit .

*Ionel Bilciurescu, Boldeşti*

11. Fie unghiurile suplementare AOB şi BOC astfel încât $m(\sphericalangle AOB) > m(\sphericalangle BOC)$. Dacă punctele M şi P sunt în interiorul unghiului AOB astfel încât $m(\sphericalangle MOP) = m(\sphericalangle BOC)$ şi $(OX$, $(OY$ sunt bisectoarele unghiurilor $MOA$ şi respectiv POB arătaţi că $m(\sphericalangle XOY) \leq 90°$. În ce situaţie avem egalitate?

*Cătălin Stănică, Brăila*

## Clasa a VII-a

**1.** Un triunghi ABC cu AB = 12cm, BC = 8cm si m(<B)= $60^0$ este echivalent cu un triunghi isoscel cu baza egala cu 16 cm. Calculati inaltimea corespunzatoare bazei triunghiului isoscel.

*Mariana Fleancu, Cîmpulung - Argeș*

**2.** Triunghiul ABC are perimetrul de 27cm , iar laturile au lungimile proporţionale cu numerele 2, 3 şi 4. Aflaţi lungimile liniilor mijlociii ale triunghiului .

*Viorica Dina, Moreni*

**3.** Aflaţi toate numerele întregi x şi y pentru care: $\frac{1}{5x}+\frac{1}{6y}=\frac{1}{6}$

*Gheorghe Achim, Mizil*

**4.** Fie $\Delta ABC$ cu $AC=10cm$ şi punctele $y$ şi $z$ interioare triunghiului astfel încât

$$m\left(\widehat{YAC}\right)=\frac{1}{3}\cdot m\left(\widehat{A}\right), m\left(\widehat{YCA}\right)=\frac{1}{3}\cdot m\left(\widehat{C}\right), m\left(\widehat{ZAB}\right)=\frac{1}{3}\cdot m\left(\widehat{A}\right), m\left(\widehat{ZBA}\right)=\frac{1}{3}\cdot m\left(\widehat{B}\right).$$

Ştiind că $m\left(\widehat{AYC}\right)=130^\circ$, iar $m\left(\widehat{AZB}\right)=140^\circ$, aflaţi perimetrul şi aria triunghiului $ABC$.

*Dumitru Oprea, Mihai Mădălin ,Dragodăneşti, Dambovița*

**5.** Se notează cu $l_3$,$l_4$ şi $l_6$ respectiv lungimea laturilor unui triunghi echilateral, pătrat respectiv hexagon regulat înscrise într-un cerc de rază R. Să se demonstreze că :

i) Se poate forma un triunghi dreptunghic având dimensiunile laturilor $l_3$,$l_4$ şi $l_6$ .
ii) Triunghiul precedent are două mediane perpendiculare

*Ioana Crăciun şi Gheorghe Crăciun, Ploieşti*

**6.** Fie $\Delta$ ABC dreptunghic în A, cu m($\angle$ C)=$60^0$ şi AC = $x$. Se construieşte (BM) bisectoarea $\angle$ B, M$\in$(AC).

a) Determinaţi lungimile segmentelor (AM), (MC) şi (BM) în funcţie de $x$;
b) Calculaţi aria $\Delta$ BMC;
c) Calculaţi sinusul $\angle$ MBC,

*Daniela Badea, Ploieşti*

**7.** Determinaţi numărul $\overline{abc}$ ştiind că cifrele sale verifică relaţia $13\cdot a+26\cdot b+c=228.$

*Dan Coma, Vădăstriţa, Olt*

**8.** Arătaţi că: $\sqrt{4002+8000+...+6+4+2}\in$ Q.

*Emilian Deaconescu, Ceptura*

**9.** Fie ABCD un pătrat de centru O în care punctul F este mijlocul laturii [CD] , iar E este intersecţia dreptelor BD şi AF.Dacă aria pătratului ABCD este $192\sqrt{2}$ cm$^2$ , aflaţi aria patrulaterului COEF.

*Gh. Achim, Mizil*

**10.** Determinaţi cel mai mic număr natural x, astfel încât numărul $N=\frac{2010^{2011}+2011^{2010}+x}{6}$ să fie număr natural.

*Magdalena Georgescu şi Mihail Focşeneanu, Ploieşti*

**11.** Dacă 3a – 5b – 12c = 0, unde a, b, c $\in$ **Z**, arătaţi că b · ( a + c) se divide cu 15.

*Gheorghe Achim, Ploieşti*

## Clasa a VIII-a

**1.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt{-x^2+6x-5}=x^2-6x+11$

*Mariana Mitea, Cugir*

**2.** Dacă numerele reale pozitive îndeplinesc condiția $x+y=3$, arătați că $\left(1+\frac{3}{x}\right)\left(1+\frac{3}{y}\right)\geq 9$

*Mariana Mitea, Cugir*

**3.** Determinați numerele naturale care au exact trei divizori a căror sumă este 2002.

*Gh. Achim, Mizil*

**4.** Fie ABCD un trapez oarecare,AB $\parallel$CD;CD>AB avand aria $a^2$ si latura BC=a.In punctul M,mijlocul laturii AD se ridica o perpendiculara MQ pe planul trapezului.Aflati lungimea acestei perpendiculare stiind ca distanta de la punctual M la planul (QBC) este maxima.

*Adelina Monica Apostol, Ploiești*

**5.** Considerăm numerele reale :

a = $\sqrt{1-x}$ , b = 1 - $\sqrt{x}$ , c = 1 - $\frac{1}{1-x}$ și d = 1 - $\frac{1}{1-x^{2011}}$ , unde x$\in\left[0,1\right)$

a) Ordonați crescător aceste numere

b) Demonstrați inegalitatea $\frac{c}{d}$ > 2011

*Ionel Bilciurescu, Boldești*

**6.** Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic şi punctele $M\in(BC)$, $N\in(C'D')$, $P\in(DD')$ astfel încât $BM=C'N=DP$. Demonstrați că:

$AM\perp(BB'N)$ și $B'M\perp(ABP)\Leftrightarrow ABCDA'B'C'D'$ este cub.

*Constantin Bărăscu, Rm. Vâlcea*

**7.** Prisma ABCDA'B'C'D' este patrulateră regulată dreaptă. Diagonala BD' este $2\sqrt{51}$ cm și latura bazei AB este de $6\sqrt{2}$ cm. Dacă a este distanța de la punctul A la planul (A'BD), iar b este distanța de la C' la planul (A'BD), determinați a + b.

*Mihail Focșeneanu, Ploiești*

**8.** Triunghiul isoscel ABC cu AB = AC = 21, $BC=\frac{42\sqrt{5}}{5}$ și triunghiul ACD cu AD = 13 și CD = 20 sunt incluse în plane perpendiculare. Determinați:

a) Distanțele de la punctul D la dreapta AB, adică DM şi la înălțimea [CQ] corespunzătoare laturii AB din triunghiul ABC;

b) Distanța de la punctul M, piciorul perpendicularei din D pe AC, la (DCQ) , $CQ\perp AB$, $Q\in(AB)$.

*Maria Negrilă și Anton Negrilă, Ploiești*

**9.** Determinați numărul elementelor mulțimii A= $\{x\in Z \mid 11 \mid x$ și $|2x-11|\leq 2011\}$.

*Maria Negrilă și Anton Negrilă, Ploiești*

**10.** Tetraedrul OABC este tridreptunghic în O iar OA=a, OB=b, OC=a+b. Calculați m(<ACO)+m(<BCO)+m(<AOB)

*Olguța și Nicolae Tălău, Craiova*