PROBLEME PROPUSE PENTRU LICEU [3)]

Clasa a IX-a

1. Să se rezolve ecuaţia $\frac{1}{x}+\frac{1}{2+[x]}=\frac{5}{4+2\{x\}}$, unde $[a]$ şi $\{a\}$ înseamnă parea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului a.

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploieşti

2. Se consideră mulţimile

$$A=\left\{x\in\mathbb{Z}/x^2+3x-m=0\right\} \text{ şi } B=\left\{x\in\mathbb{Z}/x^2-4x+m=0\right\}.$$

Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că există $a,b\in A\cup B$ astfel încât $a+b=3$.

Lucian Dragomir, Oţelul Roşu

3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi (D) o dreaptă care trece prin baricentrul G al triunghiului, care taie segmentul $[AB]$ în M şi segmentul $[AC]$ în N astfel încât $BM\cdot AB=BG^2$ şi $CN\cdot AC=CG^2$.

Să se determine valoarea maximă a unghiului $\widehat{BAC}$.

Miron Oprea, Ploieşti

4. Să se rezolve în $\mathbb{N}^*$ ecuaţia:

$\left[\frac{a^3}{b+c}\right]+\left[\frac{b^3}{c+a}\right]+\left[\frac{c^3}{a+b}\right]=\left[\frac{2}{a+b+c}\right]$, unde $[x]$ înseamnă partea întreagă a numărului x.

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploieşti

5. Rezolvaţi ecuaţia $\sqrt[4]{x+12}+\sqrt{x+12}=30$.

Mariana Mitea, Cugir

6. Dacă a, b, c $\in \mathbf{R}_+^*$, să se demonstreze că :

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c} \geq \frac{36}{a+2b+3c}$$

Dorin Mărghidanu, Corabia

7. În triunghiul ABC, fie P, Q şi R punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile BC, CA şi respectiv AB. Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a. Triunghiul ABC este echilateral.

b. $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}=\vec{0}$.

***

8. Rezolvati in numere prime ecuaţia:

$m^4+n^4-(p-1)!=530$

Cristinel Mortici

9. Fie $(a_n)_{n\geq1}$ o progresie aritmetică şi $(b_n)_{n\geq1}$ un şir definit prin $b_n=7^n$.

a) Stiind $a_5=-12$ şi $a_7=12$ calculaţi a_6.

b) Demonstraţi că şirul $(b_n)_{n\geq1}$ este o progresie geometrică.

[3)] **Se primesc soluţii până la 25 iunie 2011**

Clasa a X-a

1. Fie $a>0$ şi funcţia $f:(0,+\infty)\to R,\ f(x)=2^x+2^{\frac{a}{x}}$.

a) Arătaţi că funcţia f este strict monotonă pe intervalele $(0,\sqrt{a})$ şi $(\sqrt{a},+\infty)$.

b) Determinaţi $x\in\mathbb{R}^*$, pentru care avem relaţia $2^x+3^{\frac{1}{x}}=5$.

***

2. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases}\cos x=1+x+y\\ \cos y=1+y+z\\ \cos z=1+z+x\end{cases}$.

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploieşti

4. Să se rezolve ecuaţia $\dfrac{3^x-1}{3^x+1}=2^{1-2x}$.

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploieşti

5. Fie $a_k, b_k\in\mathbf{R}^*_+$, $k\in\{1,2,\dots,n\}$, astfel încât

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=7 \quad \text{şi} \quad \sum_{k=1}^{n}b_k=5.$$

Să se demonstreze că: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k b_k}{a_k+b_k}<3$.

Dorin Mărghidanu, Corabia

6. Să se rezolve ecuaţia $tg(1+ctgx)=ctg(1+tgx)$.

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploieşti

7. Să se rezolve ecuaţia $4^x+4^{-x}=2\left(\log_2 x+\log_2^{-1}x\right)$.

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploieşti

8. Să se determine şirul $(a_n)_{n\geq1}\subset\mathbb{N}^*$ ştiind că este crescător şi că $a_1=1$, iar pentru orice $n\geq1$ avem $a_1^3+\dfrac{a_2^3}{2}+\dfrac{a_3^3}{3}+\dots+\dfrac{a_n^3}{n}=\dfrac{a_n a_{n+1}a_{2n+1}}{6}$.

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploieşti

9. Fie $a\in(0,1)$. Sa se rezolve ecuatia:

$$\min\left(1-a^x,(1-a)^x\right)=\max\left(1-ax,(1-a)x\right)$$

Romeo Ilie, Brasov

Clasa a XI-a

1. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1} \subset (0,\infty)$ cu proprietatea că $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \geq 1$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{\frac{1}{a_k a_{k+1}}}\right]}{n^2}$, unde $[a]$ înseamnă partea întreagă a numărului real a.

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploieşti

2. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = a \leq -1$ şi $x_{n+1} = x_n - x_n^2$, $\forall n \geq 1$. Să se demonstreze că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$, $y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x_k}$ este convergent.

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploieşti

3. Să se determine matricele $A \in M_2(\mathbb{Z})$ pentru care există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^{n+1} = (n-1)A + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploieşti

4. Fie $A = \begin{pmatrix} m & m-1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, unde $m \in \mathbb{Z}$. Fie $f : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z})$, $f(X) = XA$. Să se determine m ştiind că f este funcţie bijectivă.

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploieşti

5. a) Să se arate că există $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}), A \neq B,$

$A, B \notin \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) / \exists \alpha \in \mathbb{Q} \text{ cu } X = \alpha \cdot I_2\}$ astfel încât $A^2 = B^2 = 4 \cdot I_2$;

b) Să se arate că există o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ pentru care

$$X^4 + X^2 = 20 \cdot I_2.$$

Lucian Dragomir, Oţelul Roşu

6. Find all derivable functions $f : R \to R$ such that $f(x) + f'(x) = \begin{cases} \sin x, x < 0 \\ \cos x, x \geq 0 \end{cases}$

Cristinel Mortici

7. Let A,B be 2X2 matrices with real entries such that det(AB+BA)≤ 0. Prove that det($A^2 + B^2$)≥ 0.

Cristinel Mortici

8. Fie sirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_{n+1} = \sin x_n - \cos x_n + \frac{\pi}{4}$, $\forall n \geq 1$, $x_1 = 0$. Demonstrati ca sirul este convergent si ca $\lim_{n\to\infty} x_n \in (-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6})$.

Claudiu Militaru, Ploieşti

9. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ aşa încât $A^2 = A^3$. Arătaţi că matricea $I_n - A + A^2$ este inversabilă.

***

Clasa a XII-a

1. Să se determine funcţiile $f : \mathbf{R} \to (0,\infty)$, care admit primitive F, cu proprietatea că : $F(x) = f(x) \cdot (e^x + 1)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$

Dorin Mărghidanu, Corabia, Olt

2. Să se determine o primitivă F a funcţiei continue $f:[0,\pi] \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile $F\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}$ şi $f(x)\cos x - f(\pi - x) + \sin^2 x = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploieşti

3. Fie $a \in \mathbb{R}$. Să se determine funcţiile continue $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit o primitivă F cu proprietatea $f(a-x)F(x-a) + x - a = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploieşti

4. Fie inelul $(A,+,\cdot)$ cu $1 \neq 0$. Ştiind că ecuaţia $x^2 - x + 1 = 0$ admite o soluţie unică în A, să se demonstreze că :

a) $x^2 + x^2 = 1$; b) $x^2 + x = 0$;

c) există $a \in A$ astfel încât $x^3 + a(x+1)^2 + 1 = 0$.

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploieşti

5. Se consideră matricele $A, B \in M_2(Z_{12})$, unde $A = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{7} \\ \hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix}$ si $B = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{7} \\ \hat{4} & \hat{3} \end{pmatrix}$.

Studiaţi dacă matricele A şi B sunt inversabile şi pentru fiecare caz afirmativ determinaţi matricea inversă .

***

6. Sa se determine:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{(2+\cos x)(2+\sin x)} dx \quad \text{si} \quad I_2 = \int_0^{\pi} \frac{\cos 2x}{(2+\cos x)(2+\sin x)} dx$$

Claudiu Militaru, Ploieşti

7. Să se determine funcţia continuă $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ştiind că dacă F este o primitivă a lui f cu $F(2) = 0$ avem $f(x)F(x+1) = e \cdot (x-1)^2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}.$

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploieşti

8. Să se calculeze $\int \frac{2x\sin x + \cos x}{\sin x + e^{-x^2}} dx, x \in [0, \frac{\pi}{2}].$

Valentina Soare, Ploieşti

9. Să se rezolve în $\mathbb{Z}_{13}$ ecuatia: $\hat{2}x^2 + \widehat{10}x + x = \hat{0}$.

Felicia Ozunu, Vulcan, Hunedoara