

Inspectoratul Școlar Județean Prahova

Olimpiada de matematică

Eta pa locală-12 februarie 2011

Clasa a IX a

Subiecte

1. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de numere reale dat prin relația $x_n = \frac{p x_{n-1} + x_{n+1}}{p+1}$, oricare ar

fi $n \geq 2, n \in \mathbf{N}$.

a. Să se arate că termenul general al șirului este

$$x_n = x_1 + (1 + p + p^2 + \dots + p^{n-2})(x_2 - x_1), \text{ oricare ar fi } n \in \mathbf{N}^*.$$

b. Să se arate că :

$$x_n = \frac{p x_{n-1} + x_{n+1}}{p+1}, \text{ oricare ar fi } n \geq 2, n \in \mathbf{N}^* \text{ dacă și numai dacă}$$

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{p}{x_2 x_3} + \frac{p^2}{x_3 x_4} + \dots + \frac{p^{n-1}}{x_n x_{n+1}} = \frac{1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1}}{x_1 x_{n+1}}, \text{ oricare ar fi } n \geq 1, n \in \mathbf{N}.$$

Prof Gabriel Necula, Plopeni

2. Fie $a, b \in \mathbf{N}^*$, $(a,b) = 1$, astfel încât $a < 2b\sqrt{2}$.

a. Demonstrați că $8b^2 \geq a^2 + 4$.

b. Arătați că $2ab\sqrt{2} > a^2 + 1$

Prof Petre Năchilă și Cătălin Năchilă, Ploiești

3. Fie patrulaterul $ABCD$, H_1 - ortocentrul $\triangle ABC$ și H_2 - ortocentrul $\triangle DBC$.
Să se demonstreze că $ABCD$ este inscriptibil dacă și numai dacă $H_1 H_2 \parallel AD$.

Prof Claudiu Militaru, Ploiești

4. Se consideră triunghiul echilateral ABC și punctele $M \in (BC)$, $N \in AC$, $P \in AB$ astfel încât vectorii $\vec{AM}, \vec{BN}, \vec{CP}$ să fie coliniari.

Arătați că suma $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{BN^2} + \frac{1}{CP^2}$ este constantă.

SUCCES!

Notă:

Tim p de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Școlar Județean Prahova

Olimpiada de matematică

Etapă locală-12 februarie 2011

Clasa a X a

Subiecte

1. Fie funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ și $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a = \log_{2010} 2009$ și $b = \log_{2010} 2011$. Comparați valorile funcției f în a și b .

Prof Alexandru Diței, Breaza

2.

a) Sa se arate ca numarul $a = \sqrt[3]{\sqrt{50} + 7} - \sqrt[3]{\sqrt{50} - 7}$ este numar natural;

b) Sa se rezolve in multimea numerelor complexe ecuatiile:

i) $x^3 + 3x - 14 = 0$;

ii) $x^3 + 3x - 2n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Prof Apostolescu Cezar, Ploiești

3. Se consideră în plan punctele $A(x)$, $B(y)$, $C(z)$, $x, y, z \in \mathbb{C}$.

Determinați aria triunghiului ABC, știind că $|x| = |y| = |z| = m$, $m \in \mathbb{R}^*_+$ și $m^2(x+y+z) = xyz \in \mathbb{R}$.

Prof Petre Năchilă și Cătălin Năchilă, Ploiești

4. Fie $A = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in \mathbb{Z}, |z| < 3\}$. Determinați cel mai mic $k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, în orice mulțime B inclusă în A , $\operatorname{card} B = k$, să existe numere cu suma zero.

Prof Emil Vasile, Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Școlar Județean Prahova

Olimpiada de matematică

Etapă locală-12 februarie 2011

Clasa a XI- a

Subiecte

1. Fie $A \in M_2(\mathbf{R})$ astfel încât $\text{tr}A \neq 0$ și $\det A \neq 0$.
- (i) Să se arate că funcția $f : M_2(\mathbf{R}) \rightarrow M_2(\mathbf{R})$, $f(X) = AX + XA$ este bijectivă.
- (ii) Să se determine toate matricele $X \in M_2(\mathbf{R})$ care verifică egalitatea :
- $$A(AX + XA) + (AX + XA)A = A(AX^2 + X^2A) + (AX^2 + X^2A)A.$$

Prof.Necula Gabriel,Ploeni

2. Fie sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_{n+1} = \frac{4022x_n}{2011 + x_n^2}$, $\forall n \geq 1$, $x_1 = \sqrt{2012}$. Demonstrați ca sirul este convergent și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Prof. Militaru Claudiu,Ploiesti

3. Fie sirul $(D_n)_{n \geq 1}$ unde $D_n = \begin{vmatrix} n! & (n+1)! & (n+2)! \\ (n+3)! & (n+4)! & (n+5)! \\ (n+6)! & (n+7)! & (n+8)! \end{vmatrix}$

a)Calculați D_n

b)Fie $t_n = \frac{D_{n-1}}{D_n}$, $n \geq 1$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{3k}$

Prof. Emil Vasile,Ploiesti

4. Fie matricele $A, B \in M_n(\mathbf{R})$, $n \geq 2$ astfel încât $AB + \varepsilon A + \varepsilon^2 B = O_n$ unde $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Sa se arate ca $AB = BA$

Gazeta Matematica

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Școlar Județean Prahova

Olimpiada de matematică

Etapă locală-12 februarie 2011

Clasa a XII- a

Subiecte

1. Fie $G=[0,1)$ definim legile de compoziție

$x * y = \{x + y\}$; $x \tau y = 0,3 * x * y$; $x \circ y = 0,7 * x * y$ unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului x

a) Sa se arate ca $(G, *)$ este grup abelian

b) Sa se arate ca (G, τ) și (G, \circ) sunt grupuri abeliene izomorfe

2. Sa se calculeze $\int \left(\frac{\arctg x}{\arctg x - x} \right)^2 dx, x \in (0, \infty)$.

Prof. Vasile Coman, Valenii de Munte

3. Fie (G, \cdot) un grup finit de n elemente ($n \in \mathbf{N}, n \geq 2$), de element neutru e ,

astfel încât $x^3 = e, \forall x \in G$

a) Sa se arate ca $6 \mid (n-3)$

b) Dati un exemplu de grup cu proprietatea din enunț, cu 9 elemente

Prof Cezar Apostolescu, Ploiesti

4. Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow [-a, a], a > 0$ o funcție continuă. Sa se arate ca :

$$\sqrt{7} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - f^2(x)} dx + 3 \int_{-a}^a f(x) dx \leq 8a^2$$

Gazeta Matematica

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10