

De la găuri negre la partiții întregi

Mircea Merca¹

Colegiul Tehnic Constantin Istrati
Griviței 91, 105600 Câmpina, România

Abstract

This paper is a synthesis of my researches in Mathematics and of the main results already published or submitted.

Cu mulți ani în urmă, în mai 1992, am prezentat la Sinaia, la Sesiunea de comunicări metodico-științifice a SSMR filiala Prahova, o lucrare cu titlul *Găuri negre în mulțimea numerelor naturale*. Poate unii dintre dumneavoastră vă amintiți acel moment. Lucrarea a fost premiată și, pentru mine, un debutant în învățământ, acel premiu a reprezentat mult și nu mă refer la recompensa financiară primită. Motivată, dar și obligat, de această reușită, am prezentat la următoarea sesiune de comunicări metodico-științifice a SSMR filiala Prahova un studiu personal asupra relației recurente liniare de ordinul al doilea cu titlul *O relație de recurență cu numeroase aplicații*. Lucrarea avea peste 120 de pagini (format A4, redactate computerizat). Când am prezentat-o, cineva m-a întrebat - poate glumind, sau poate serios - dacă am avut timp să citesc ce am scris în lucrare. A fost o întrebare la care nu am răspuns atunci, deși vârsta nu m-a împiedicat niciodată să răspund la astfel de întrebări.

În aceea lucrare au fost prezentate câteva idei importante. Utilizând instrumente matematice destul de simple, am prezentat o nouă modalitate de tabelare a coeficienților binomiali, am generalizat formulele lui Newton pentru calculul sumelor de puteri și am dezvoltat mai multe metode numerice care generau identități matematice cu funcții trigonometrice sau coeficienți binomiali. Următoarele exemple sunt selectate aleator dintre cele prezentate în lucrare:

$$\sum_{k=0}^n (-4)^k \frac{k^2}{2k+1} \binom{n+k}{2k} = (-1)^n \frac{2n(n+1)(2n^2+2n-1)}{3(2n+1)},$$

$$\sum_{k=1}^n \cos^{22} \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{176358n - 436109}{1048576}, \quad n > 10.$$

Peste 150 de astfel de relații au fost obținute și prezentate atunci. Mai târziu am revenit asupra acestor lucruri și în lucrarea de disertație *Identități matematice generate cu ajutorul calculatorului*, susținută în 2002 la Universitatea Politehnică din București am prezentat peste 5000 de identități cu sume de funcții trigonometrice.

Email address: mircea.merca@profinfo.edu.ro (Mircea Merca)

¹Este profesor de informatică la Colegiul Tehnic Constantin Istrati, Câmpina. A absolvit în 1991 Facultatea de Matematică a Universității Babeș-Bolyai, Cluj Napoca și în 2002 Școala de Studii Academice Postuniversitare de Informatică Aplicată, Universitatea Politehnică din București. Din octombrie 2011 este doctorand al Școlii Doctorale în Matematici Aplicate, Universitatea din Craiova.

Preprint submitted to SSMR-Prahova

18 decembrie 2011

Numărul foarte mare de identități pe care puteam să le obțin prin metodele numerice prezentate m-a pus pe gânduri și am început să caut generalizări pentru formulele obținute. Era clar că trebuia să schimb modul de abordare. Așa am ajuns să studiez analiză combinatorială și în special partiții întregi. Aveam nevoie de algoritmi care să genereze toate partițiile unui număr întreg. Dacă nu urmărim să obținem algoritmi eficienți, generarea partițiilor întregi este o problemă simplă chiar și pentru un elev de liceu. Aș fi putut să utilizez pentru ce aveam nevoie o aplicație de tipul Computer System Algebra, dar studiul partițiilor m-a fascinat. Am lăsat deoparte identitățile și am început să caut în literatura de specialitate algoritmi eficienți pentru generarea partițiilor întregi, dar și structuri de date pentru stocarea acestora. Așa am ajuns să obțin cel mai rapid algoritm pentru generarea partițiilor întregi. Publicarea acestuia la Springer [2], confirmă eficiența și recunoașterea algoritmului.

Așa cum se poate vedea în [2], pentru a obține acest algoritm am introdus o nouă categorie de partiții cu restricții, dar și o nouă structură de date pentru stocarea partițiilor întregi, bazată pe arbori binari stricți. Apoi am optimizat această structură și, pentru a-i dovedi eficiența, a trebuit să găsesc o formulă pentru următoarea sumă

$$\sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k^2}{12} \right\rfloor.$$

Am formulat o problemă în legătură cu această sumă și am trimis-o pentru publicare la Missouri Journal of Mathematical Sciences. Demonstrația prezentată pentru problemă a fost considerată "artificială" și problema a fost respinsă de către editori. Nu mi s-a explicat ce înseamnă "artificial", iar eu am transmis apoi problema la Newsletter of the European Mathematical Society, unde a fost publicată în martie 2011 (vezi [3, pag. 52] și [4, pag. 61-62]). Rezolvarea acestei sume a reprezentat o nouă provocare și m-a condus către o nouă metodă care permite să generăm inegalități și identități cu sume care implică funcțiile întregi floor, ceiling și round. Metoda este foarte productivă, poate fi aplicată asupra unui număr foarte mare de șiruri de numere întregi și este publicată de către School of Computer Science, University of Waterloo, Canada [5]. În ultima secțiune din lucrare am prezentat trei conjecturi din teoria numerelor pe care le-am obținut aplicând metoda prezentată asupra șirului $(n^k)_{n>0}$ și asupra numerelor lui Fibonacci. Pe parcursul elaborării acestui articol am înregistrat mai multe șiruri în OEIS [7] și am prezentat formule pentru generarea unor șiruri existente. Faptul că aceste șiruri și formule erau acceptate, dar și interesul manifestat de către editorii de la OEIS, îmi întăreau convingerea că metoda la care lucram era nouă. Acum sunt autorul a 86 de șiruri de numere întregi înregistrate în [7] și am contribuit cu formule pentru generarea altor 51 de șiruri înregistrate de alți autori.

Demonstrarea eficienței algoritmului prezentat în [2] se bazează pe următoarea inegalitate cu funcția partiții:

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) \leq 0.$$

Nu știam dacă această inegalitate a mai fost demonstrată. Am căutat mult și nu am găsit nimic. Nu aveam cu cine să mă consult în această privință. Am constatat cu această ocazie că teoria partițiilor este puțin cunoscută în țara noastră, chiar și în mediul academic. În cele din urmă m-am hotărât să-l întreb despre inegalitate pe academicianul american George E. Andrews, profesor la The Pennsylvania State University, președinte al American Mathematical Society, specialistul numărului unu în teoria partițiilor. Mi-am spus că nu am nimic de pierdut. Ulterior am constatat că am câștigat enorm. La mai puțin de 3 ore după ce am pus întrebarea am primit un mail în care Profesorul G. E. Andrews mi-a răspuns că această inegalitate nu apare în altă parte și că a

doua zi îmi va trimite o soluție, deși eu nu solicitasem acest lucru. Am primit rezolvarea chiar în dimineața zilei următoare, era scrisă de mână și apoi scanată. Mi-a spus că a rezolvat-o în acea noapte și pot să o includ în lucrarea mea. În acel moment lucrarea mea era complet finalizată. Recenzorii nu au mai avut obiecții, deși unul dintre ei ezita să dea decizia finală pentru publicare (nu am aflat motivul). A fost nevoie de intervenția editorului șef care, cu câteva luni în urmă, mai precis în aprilie 2011, îmi încredințase recenzia unui manuscris trimis pentru publicare la Journal of Mathematical Modelling and Algorithms, și îi mulțumesc pentru acest lucru. Acest manuscris este acum publicat, iar eu fac a doua recenzie pentru acest jurnal.

După două săptămâni de la primirea soluției pentru inegalitatea cu partiții, Profesorul G. E. Andrews îmi trimite un nou e-mail. Îmi spune că este preocupat de această inegalitate și îmi propune un joint paper. Am constatat că ne preocupa pe amândoi același lucru: generalizarea acelei inegalități. A fost o surpriză enormă pentru mine. Nu am visat să scriu vreodată cu G. E. Andrews. Manuscrisul [1] a fost finalizat repede, în aproximativ o săptămână, și a fost trimis pentru publicare la Journal of Combinatorial Theory, Series A (jurnal cotelat ISI). Experiența d-lui profesor a contat enorm. Până la apariție manuscrisul poate fi văzut pe pagina personală a Profesorului G. E. Andrews, la adresa <http://www.math.psu.edu/andrews/preprints.html>.

Utilizând partițiile și matematica experimentală am descoperit câteva formule care generalizează o mare parte dintre identitățile cu sume de funcții trigonometrice amintite. De fapt, am stabilit o nouă conexiune între trigonometrie și combinatorică. Am aflat că ceea ce am început eu în 1992 ține de un subdomeniu al matematicii care, deocamdată nu apare în Mathematics Subject Classification (MSC2010). Articole care invocă conceptul *Combinatorial Trigonometry* apar din ce în ce mai des, în special după 2007, unul dintre promotorii conceptului fiind Profesorul Arthur T. Benjamin de la Harvey Mudd College, USA. Formulele mele sunt acum în stadiul de problemă deschisă, nu am reușit să găsesc demonstrații riguroase pentru ele. O problemă deschisă publicată la SIAM [6] și o conjectură publicată în [4, pag. 59] mi-au confirmat faptul că aceste formule nu sunt cunoscute. Profesorul Cecil C. Rousseau de la Teh University of Memphis, editor la SIAM, mi-a confirmat interesul manifestat pentru problema [6]. Soluțiile primite pentru această problemă sunt valabile numai în anumite cazuri particulare sau nu sunt suficient de riguroase.

Ar mai fi câteva lucruri de prezentat, dar aștept să devină certitudini.

Bibliografie

- [1] G. E. Andrews, M. Merca, The Truncated Pentagonal Number Theorem, preprint, <http://www.math.psu.edu/andrews/pdf/288.pdf>
- [2] M. Merca, Fast Algorithm for Generating Ascending Compositions, *J. Math. Model. Algorithms*, 2011, DOI, 10.1007/s10852-011-9168-y
- [3] M. Merca, Problem 78, *Eur. Math. Soc. Newsl.*, **79** (2011),
- [4] M. Merca, Problem 89, *Eur. Math. Soc. Newsl.*, **81** (2011),
- [5] M. Merca, Inequalities and Identities Involving Sums of Integer Functions, *J. Integer Seq.*, **14:9** (2011)
- [6] M. Merca, Asymptotic behavior of cosine power sums, *Problems and Solutions Links*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011, <http://siam.org/journals/categories/11-002.php>
- [7] N. J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Published electronically at <http://oeis.org>, 2011.