SPONSORII CONCURSULUI

PROMOȚIA CLASA A XII-A 2009-2010
SC VILMAR SA
SC HUMAN TARGET SRL
SC PADEM VECTOR SRL
SC HARDWOOD SRL
SC ALFA FARM SRL BĂBENI
SC FLAMICOM SRL PITEȘTI
SC RIOVIL SRL CALIMANESTI
SC SOFICARM SRL
SC TRUST 3 CONSTRUCȚII SA
SC WISE SRL
SC DIANA SRL
SC ANNALELLA SRL
SC BOROMIR SA
SC SPECIAL TRADING SRL
CLASA A X-A F 2010-2011
CLASA A IX-A E 2010-2011
PF SIBIESCU MATILDA ADRIANA
PF BĂLĂNESCU EMIL
PF ȘTEFAN GHEORGHE
PF MĂRĂCINE ADELIN
PF NĂSTOIU ANDREI
SC BIBU TRANS SRL
SC CĂTĂNOIU SRL
SC FARMACIA MOGA SRL
SC PENSIUNEA SOCOLESCU SRL MALAIA
SC VILMA COMP SRL
SC MULTISERV DISTRIBUTION SRL
SC PRODSERVIL SRL
SC VERCATA SRL PAUSESTI
SC RUSINVEST SRL
SC VELPITAR SA
PF ANDRONACHE ADRIAN
PF LAZAR LUCIAN
PF CIOCEANU SIMINA
I.I. MLISAN MIRELA
PF JIANU BOGDAN

i-Stiri.ro

Tehnoredactare profesor Valeriu Lazăr, Colegiul Național "Alexandru Lahovari" Rm. Vâlcea

Ministerul Educației, Cercetării Tineretului și Sportului
Inspectoratul Școlar Județean Vâlcea

Societatea de Științe Matematice din România, Filiala Vâlcea
Grup Școlar „Oltchim" Râmnicu Vâlcea

Asociația „Alexandru Lahovari" Rm. Vâlcea

Colegiul Național „Alexandru Lahovari"
Rm. Vâlcea

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „NICOLAE PĂUN"

RM. VÂLCEA - EDIȚIA a XVII - a
10 - 12 DECEMBRIE 2010

Participă elevi din județele:
Constanța, Dâmbovița, Dolj, Gorj, Olt, Prahova, Sibiu, Vâlcea și municipiul București

COMISIA DE ORGANIZARE

- prof. Constantin Drugan — Președintele concursului, Președinte Filiala Vâlcea S.S.M.R.
  Director Colegiul Național „Alexandru Lahovari" Rm. Vâlcea
- prof. Gabriela Ene — Inspector școlar general al Județului Vâlcea
- prof. univ. Constantin Bușe — Universitatea de Vest Timișoara
  responsabilul comisiei de elaborare și evaluare a subiectelor gimnaziu și liceu
- prof. Marius Maziliu — Inspector școlar matematică – Județul Vâlcea
- prof. Vasile Gorgotă — responsabil catedră, C. N. „Alexandru Lahovari" Rm. Vâlcea
  membru al comisiei de elaborare și evaluare a subiectelor gimnaziu și liceu
- prof. Ștefan Smărăndoiu — Școala „Take Ionescu" Rm. Vâlcea
  membru al comisiei de elaborare și evaluare a subiectelor gimnaziu și liceu
- prof. Constantin Bărăscu — Școala Nr. 5 Rm. Vâlcea
  membru al comisiei de elaborare și evaluare a subiectelor gimnaziu și liceu
- prof. Florin Smeureanu — Director Grup Școlar „Oltchim" Rm. Vâlcea
- prof. Valeriu Lazăr — Colegiul Național „Alexandru Lahovari" Rm. Vâlcea
  secretar concurs
- prof. Maria Vețeleanu — Colegiul Național „Alexandru Lahovari" Rm. Vâlcea
- prof. Nicolae Șerban — Colegiul Național „Alexandru Lahovari" Rm. Vâlcea
- prof. Mariana Ciobotaru — Colegiul Național „Alexandru Lahovari" Rm. Vâlcea
- prof. Adrian Bălășel — Colegiul Național „Alexandru Lahovari" Rm. Vâlcea
- prof. Ana Maria Drăghici — Colegiul Național „Alexandru Lahovari" Rm. Vâlcea
- prof. Simona Ianc — Colegiul Național „Alexandru Lahovari" Rm. Vâlcea
- prof. Issabella Cataragă — Colegiul Național „Alexandru Lahovari" Rm. Vâlcea
- prof. Adrian Filip — Colegiul Național „Alexandru Lahovari" Rm. Vâlcea

PROGRAMUL CONCURSULUI

11.XII.2010

$9 - 9^{30}$	- Festivitatea de deschidere
$9^{30} - 10$	- Prezentarea elevilor în săli
10 - 13	- Desfășurarea probei scrise
13 - 19	- Corectarea lucrărilor scrise
19	- Afișarea rezultatelor

Alte informații vor fi afișate pe site-ul colegiului
www.lahovary.ro

12.XII.2010

9 - 10	- Festivitatea de premiere

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "NICOLAE PĂUN"
EDIȚIA A XVII-A - DECEMBRIE 2010

SUBIECTE CLASA A V -A

Problema 1.

a) Comparați 2^{33} cu 3^{22}.

***

b) Comparați numerele $a^{\overline{bb}}$ și $b^{\overline{aa}}$ cu $a \neq b$, știind că $a^3 = b^2$.

Alexandru Cebuc, Slatina – G.M., nr. 10/2010

Problema 2

Se consideră numerele naturale: 1, 4, 7, 10, 13, ..., 121, 124.

a) Determinați suma numerelor de mai sus.

b) Stabiliți dacă numărul n = 147101316.....118121124, obținut prin "alăturarea" numerelor date, luate în ordine crescătoare, este pătrat perfect.

Cecilia Deaconescu, Pitești și Dumitru Dobre, Rm. Vâlcea

Problema 3

Aflați cel mai mic și cel mai mare număr natural de forma $\overline{abc3}$, știind că dacă îl împărțim la un număr natural de două cifre obținem restul 96.

Leon Genoiu și Marius Giurgiu, Rm. Vâlcea

Problema 4

Se consideră șirul de numere: 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7,7, 8, 9, 9, 10, ...

a) Care este al 201-lea termen al șirului?

b) Dacă notăm termenii șirului, de la stânga la dreapta, cu a_1, a_2, a_3, a_4, ...,

demonstrați că $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{3k} = k(3k+1)$, unde $k \in N^*$.

Constantin Bărăscu, Rm. Vâlcea

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii, fiecare subiect fiind cotat cu 7 puncte. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "NICOLAE PĂUN"
EDIȚIA A XVII-A - DECEMBRIE 2010

SUBIECTE CLASA A VI -A

Problema 1.

a) Determinați numărul natural prim n știind că $n+2$ este un divizor comun al numerelor $8n^2+3n+5$ și $6n^2-24$.

Gheorghe Radu, Rm. Vâlcea

b) Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ notăm cu p_n al n – lea număr natural prim. (De exemplu $p_1=2$, $p_2=3$ etc).

b₁) Aflați $n \in \mathbf{N}^*$ pentru care $p_{n+1}-p_n=1$;

b₂) Determinați $n \in \mathbf{N}^*$ pentru care $p_n \geq 2n+1$.

Nicolae Bourbăcuț, Hunedoara

Problema 2

Fie mulțimea E = {3, 7, 11, 15, 19, ..., 63, 67}.

a) Calculați suma elementelor mulțimii E ;
b) Poate fi împărțită mulțimea E în trei submulțimi disjuncte două câte două, astfel încât suma elementelor din fiecare submulțime să fie aceeași ? Justificați !
c) Dacă A este o submulțime a lui E formată din 11 elemente, demonstrați că mulțimea A conține două elemente a căror sumă este divizibilă cu 29.

Constantin Bărăscu, Râmnicu Vâlcea

Problema 3

Se consideră punctele coliniare $A_1, A_2, A_3, ..., A_{2011}$ astfel încât $A_1A_2 = 1$ cm, $A_2A_3 = 2$ cm, ..., $A_{2010}A_{2011} = 2010$ cm.

a) Arătați că există o ordine a punctelor A_1, A_2, A_3, A_4 și A_5 astfel încât $A_1 = A_5$;
b) Determinați o ordine de așezare a punctelor $A_1, A_2, ..., A_{2009}$ astfel încât $A_1 = A_{2009}$;
c) Arătați că oricum am alege o ordine a tuturor celor 2011 puncte, A_1 și A_{2011} nu coincid.

Cecilia Deaconescu, Pitești și Dumitru Dobre, Rm. Vâlcea

Problema 4

Se consideră semidreptele $[OA_1$, $[OA_2$, ...,$[OA_{2010}$, distincte două câte două. Notăm cu $\mathcal{U}$ mulțimea tuturor unghiurilor având ca laturi două semidrepte distincte dintre cele considerate.

a) Demonstrați că în $\mathcal{U}$ există măcar un unghi de măsură cel puțin egală cu 10' și măcar un unghi de măsură cel mult egală cu 11' ;
b) Determinați numarul de elemente al mulțimii $\mathcal{U}$.

Gabriel Popa, Iași

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii, fiecare subiect fiind cotat cu 7 puncte. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "NICOLAE PĂUN"
EDIȚIA A XVII-A - DECEMBRIE 2010

SUBIECTE CLASA A VII -A

Problema 1.

a) Arătați că niciun pătrat perfect nu dă restul 2 la împărțirea la 11 ;
b) Demonstrați că oricum am alege 7 numere naturale, există două a căror diferență sau sumă se divide la 11.

Cristina Drăgan, Rm. Vâlcea și Marcel Teleucă, Chișinău

Problema 2

Pentru fiecare număr natural $n \geq 1$, notăm cu $a_n = (n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)$.

Să se arate că:

a) a_n divide pe a_{n+1};

b) 2^n divide pe a_n;

c) 2^{n+1} nu divide pe a_n.

Maria Pop, Cluj Napoca

Problema 3

Fie AECD un patrulater convex în care $m(\angle ECD) = 30^\circ$, $m(\angle AEC) = m(\angle ADC) = 90^\circ$, $[AE] \equiv [AD]$ și $AC \cap ED = \{O\}$. Paralela prin A la ED intersectează pe CE și CD în B, respectiv F.

a) Demonstrați că $AC \perp ED$;

b) Dacă perimetrul triunghiului ΔAOE este de 30 cm, calculați perimetrul triunghiului ΔABC.

Marin Mazilu, Rm. Vâlcea

Problema 4

Fie un triunghi având lungimile laturilor proporționale cu numerele 2, 3 și 4.
Demonstrați că triunghiul nu poate avea un unghi cu măsura de 60° .

Constantin Bărăscu, Rm. Vâlcea

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii, fiecare subiect fiind cotat cu 7 puncte. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "NICOLAE PĂUN"
EDIȚIA A XVII-A - DECEMBRIE 2010

SUBIECTE CLASA A VIII -A

Problema 1.

Fie numerele reale pozitive a, b, c astfel încât $\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}=1$.

Demonstrați că $abc \geq 2$.

Marcel Teleucă, Chișinău

Problema 2

Se consideră o tablă de șah 8x8. Pe 33 dintre pătrățelele acesteia se așează câte o piatră. Demonstrați că indiferent de modul de așezare, există 5 pietre ce nu se află pe aceeași linie sau coloană.

~~Vasile Gorgotă, Rm. Vâlcea~~

M.Teleucă

Problema 3

În patrulaterul convex ABCD se cunosc măsurile unghiurilor: $m(\angle BAC)=20^\circ$, $m(\angle BCA)=35^\circ$.

a) Dacă D este centrul cercului circumscris triunghiului ΔABC, aflați măsura unghiului format de diagonalele patrulaterului ABCD ;

b) Știind că $m(\angle BDC)=40^\circ$ și $m(\angle BDA)=70^\circ$, arătați că D este centrul cercului circumscris triunghiului ΔABC.

Cornel Moroti, Rm. Vâlcea

Problema 4

Fie cubul ABCDA'B'C'D' cu AB = 12 cm.

a) Aflați distanța de la puncul A' la planul (AB'D') ;
b) Arătați că punctele A', I și C sunt coliniare, unde punctul I este centrul cercului înscris triunghiului $\Delta AB'D'$;
c) Fie F∈ (AA'), G∈(BB') și E∈(CC') astfel încât BG = 3cm și $\frac{A'F}{AA'}=\frac{C'E}{CC'}=\frac{1}{3}$.

Calculați perimetrul secțiunii determinate de planul (EFG) în cub.

Ștefan Smărăndoiu, Rm. Vâlcea

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii, fiecare subiect fiind cotat cu 7 puncte. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "NICOLE PAUN"
EDIȚIA A XVII-A DECEMBRIE 2010

SUBIECTE CLASA A IX-A

Problema 1. Fie n un număr natural mai mare sau egal ca 2.Să se demonstreze că pentru orice x din intervalul [1, n] au loc inegalitățile:

$$\frac{n^2-1}{4} \le |x-1| + |x-2| + \dots + |x-n| \le \frac{n(n-1)}{2}$$

Nicolae Bourbăcuț

Problema 2. a) Să se rezolve în R ecuația

$$x^2 - x + [x] - 2 = 0 .$$

Vasile Pop

b) Determinați numerele naturale nenule care nu sunt pătrate perfecte și pentru care $[\sqrt{n}]^3$ divide n^2, unde [a] este partea întreagă a numărului real a.

***

Problema 3. Fie ABCD un patrulater convex și M, P, N puncte pe segmentele [AB], [BC] și respectiv [CD] astfel încât

$$\frac{MB}{AB} = \frac{BP}{BC} = \frac{ND}{DC} = \frac{1}{3}.$$

Fie R și S respectiv mijloacele segmentelor [AP] și [MN].

Arătați că RS este paralelă cu AD și RS=$\frac{1}{3}$AD.

Constantin Drugan

Problema 4. Arătați că patrulaterul ABCD în care suma medianelor este egală cu semiperimetrul, este paralelogram. Prin mediană înțelegem segmentul ce unește mijloacele a două laturi opuse.

***

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii, fiecare subiect fiind cotat cu 7 puncte. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "NICOLE PAUN"
EDIȚIA A XVII-A DECEMBRIE 2010

SUBIECTE CLASA A X-A

Problema 1. Determinați $n \in N$ și mulțimea $B \subseteq R$ știind că există o funcție bijectivă

$f:\{1,2,.....n\} \to B$ cu proprietatea ca $\sqrt{5-3^{f(k)}} = 5-9^{f(k)}$, oricare ar fi $k \in \{1,2,..,n\}$.

Cristinel Mortici

Problema 2. Să se determine funcțiile $f: R \to [0,\infty)$ cu proprietatile:
$f(x) \geq 2^x$ pentru $x \in R$ și

$$f(x+y) \geq f(x)f(y), \forall x, y \in R.$$

Vasile Pop

Problema 3. Fie a,b numere reale mai mari ca 1.Arătați că $a \neq b$ dacă și numai dacă funcția $f:(0,\infty) \to Z, f(x) = [\log_a x] - [\log_b x]$este surjectivă.

Constantin Drugan

Problema 4. Fie z, v, w trei numere complexe (v și w nenule). Presupunem că există a și b strict pozitive cu a+b=1, astfel încât z=av+bw și că $|zv - vw| = |zw - vw|$ .Arătați că

$$|z| \leq \frac{2|vw|}{|v|+|w|}.$$

Formulați o generalizare a acestei probleme.

Constantin Bușe

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii, fiecare subiect fiind cotat cu 7 puncte. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "NICOLE PAUN"
EDIȚIA A XVII-A DECEMBRIE 2010

SUBIECTE CLASA A XI-A

Problema 1. Fie P: $R^2 \to R^2$ data de P(x,y)=(x^2y, x^2y^3). Notam $P_{n+1}= P \circ P_n$ și $P_n(x,x)=(x^{f(n)}, x^{g(n)})$.

$$\text{Calculați } \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2f(n)}{g(n)}\right]^{4^n}.$$

Vasile Gorgotă

Problema 2. Fie M multimea tuturor matricilor cu 3 linii și 5 coloane, ale căror elemente sunt 1 sau -1 și pentru care produsul elementelor pe fiecare linie și pe fiecare coloană este egal cu -1.

a) Găsiți numărul de elemente al mulțimii M.
b) Determinați valoarea maximă a minorilor de ordinul 3 formați cu elementele matricilor din M.

Lazăr, Iași

Problema 3. a) Să se determine $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\ln 2}{2}+\dfrac{\ln 3}{3}+\dfrac{\ln 4}{4}+.....+\dfrac{\ln n}{n}}{(\ln n)^2}$.

b) Fie a_n cel mai mic număr natural pentru care:

$$\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+.....+\frac{\ln a_n}{a_n}>n^2.$$

Arătați că există un numar natural N, astfel încât $a_n \geq n$ pentru orice $n \geq N$.

c) Calculați $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln a_n}{n}$.

Vasile Pop

Problema 4. Fie A o matrice de odinul 3 cu elemente numere complexe, al cărui polinom caracteristic este $p(\lambda)=(\lambda-x)^2(\lambda-y)$, unde $x\neq 0$ și $x\neq y$.
Arătați că există matricele coloană B, C și D astfel încât egalitatea

$$col_1(A^n)=x^n(nB+C)+y^nD$$

să aibă loc pentru orice n număr natural.

Constantin Bușe

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii, fiecare subiect fiind cotat cu 7 puncte. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "NICOLAE PAUN"
EDIȚIA A XVII-A DECEMBRIE 2010

SUBIECTE CLASA A XII-A

Problema 1. Se consideră grupul $(G,\cdot)$ cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.
Spunem că subgrupul H al lui G are proprietatea P dacă $H \neq G$ și pentru orice $x, y \in G \setminus H$ avem că $xy \in H$.

a) Să se dea un exemplu de grup G, care are trei subgrupuri distincte, H, K, L cu proprietatea P, astfel încât $G = H \cup K \cup L$.
b) Dacă H, K, L sunt subgrupuri distincte cu proprietatea P ale lui G și $G = H \cup K \cup L$, să se determine $|H \cap K \cap L|$.

Dana Heuberger

Problema 2. Să se calculeze:

$$I = \int \frac{x^2 + 8}{(x^2 - 16)\sin x + 8x\cos x} dx,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Virgil Nicula, Vasile Gorgotă

Problema 3. a) Construiți un grup multiplicativ G= { $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots\ldots A_p$ } unde $A_i \in M_n(R)$.
b) Arătați că pentru orice astfel de grup avem Tr ($A_1 + A_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_p$) este un întreg divizibil prin p, unde cu Tr(A) s-a notat suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A.

Mihai Piticari

Problema 4. Fie $f: R \to R$ o funcție ce are limite laterale finite, în orice punct din R.

a) Să se arate că f este mărginită pe orice interval real [a,b].
b) Presupunând că f este integrabilă Riemann pe orice interval real [a,b], arătați că funcția $x \to$ F(x)= $\int_0^x f(t)dt$ are derivate laterale finite în orice punct din R.

Sorin Rădulescu, Mihai Piticari

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii, fiecare subiect fiind cotat cu 7 puncte. Timp de lucru 3 ore.