Elie Radu(1853-1931)
pedagog,academician si inginer roman

Concursul judetean de matematica

„Elie Radu”-4 decembrie 2010

Clasa a IX-a

La subiectele 1-6 alegeti varianta de raspuns corecta

1. (10p)Valoarea sumei : $\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{49+2\sqrt{600}}}$ este egala cu :

   a) b)10; c)4; d)3,5; e)4,5.

(10p) 2. Daca $\frac{1}{27}=0,a_1a_2a_3\ldots.a_n\ldots.$, atunci $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2010}$ este :

a) 6000;b)7700;c)3560; d)6700;e) 8000 .

(10p) 3. Fie triunghiul ABC cu latura AB= x,BC= y,AC= z , unde x,y,z verifica relatia :

$\sqrt{x^2-12x+61}+\sqrt{y^2-20y+149}+\sqrt{z^2-16z+73}\leq 15$. Inaltimea corespunzatoare laturii de lungime mai mare este :

a)8; b)4,8; c)12; d)6; e)5.

(10p) 4. Suma solutiilor ecuatiei : $\left[\frac{x+3}{4}\right]=\frac{x-2}{3}$ este egala cu :

a) 18; b)25; c)32; d)50; d)60.

(10p)5. Se da o progresie aritmetica cu primul termen $a_1=1$ si ratie r = 2. Valoarea sumei :

$\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_3a_5}+\cdots+\frac{1}{a_{2009}a_{2011}}$ este egala cu :

a) $\frac{1005}{4021}; b)\ \frac{1008}{4021}; c)2000; d)1207; e)\ \frac{1021}{4005}$.

(10 p)6. Fie ABCD un paralelogram si E si F doua puncte astfel incat $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ si $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$. Atunci masura unghiului $\widehat{BCF}$ este egala cu

a) $180°; b)165°; c)135°; d)110°; e)120°$.

La subiectul 7 se cere rezolvare completa

7. Consideram triunghiul ABC , avand laturile AB=3 si AC=2. In planul acestuia se considera punctele M,N,D astfel incat : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}$=3$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ +3$\overrightarrow{AC}$. Sa se arate ca:

a) $(AM) \equiv (AN)(15p)$;b)[AD este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ (15p)

Nota . Toate subiectele sunt obligatorii . Timp de lucru efectiv 120 minute . Se acorda 10 puncte din oficiu .

Barem de corectare si notare

1(10p)	2(10p)	3(10p)	4(10p)	5(10p)	6(10p)
c)4	d)6700	b)4,8	d) 50	a) $\frac{1005}{4021}$	a) $180°$

7. a) AM= $|\overrightarrow{AM}| = 2|\overrightarrow{AB}| = 6$ (5p); AN=$|\overrightarrow{AN}| = 3|\overrightarrow{AC}| = 6$ (5p) ,

$AM = AN \Rightarrow (AM) \equiv (AN)$ (5p)

b) Din regula paralelogramului rezulta AMDN – paralelogram (5p) si din a) rezulta AMDN romb (5p) de unde rezulta)[AD este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$(5p)

Colegiul Tehnic “Elie Radu”, Ploieşti

ELIE RADU (1853-1931)
Pedagog, academician şi inginer român

Concursul de matematică “Elie Radu”

Ploieşti, 04.12.2010

Clasa a X-a

I. La subiectele 1)-6) alegeți răspunsul corect:

1) Fie $x=\sqrt[3]{\sqrt{7}-\sqrt{11-4\sqrt{7}}}$ si $y=\dfrac{\sqrt[4]{x^6-1}}{x^3-1}$. Atunci:

a) $y\in$ Q ; b) $y=\sqrt{7}$; c) $y\le 0$; d) $y>1$; e) $y=\sqrt[3]{7}$.

2) Fie ecuatia $x^2-3x+7=0$ cu radacinile $x_1, x_2\in$ C si expresia E=$\dfrac{x_1^2-3x_1-7}{x_1^3}+\dfrac{x_2^2-3x_2-7}{x_2^3}$. Atunci:

a) E =$\dfrac{72}{49}$; b) E =0 ; c) E$\notin$ R ; d) E =$\dfrac{3}{7}$; e) E =$-\dfrac{1}{7}$.

3) Fie H(x) = $\log_{x^2+2}\left(x+1-\sqrt{1-x^2}\right)$. Multimea valorilor reale ale lui x pentru care H este bine definita este:

a) $\left(-\dfrac{1}{4};1\right]\setminus\{0\}$; b) $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$; c) R ; d) $(0;1]$; e) $(0;\infty)$.

4) Fie $z=(1-a)+(a+2)\cdot i$; $a\in$R. Valoarea minima a lui $|z|^2$ este:

a) $\dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{9}{2}$; c) 0 ; d) $-\dfrac{1}{2}$; e) 1.

5) Fie A = $\left\{ z \in C / \log_2 \left(\frac{1-|z|}{z \cdot \bar{z}} \right) = 1 \right\}$. Atunci:

a) A = ϕ ; b) A = $\left\{ \pm \frac{1}{2} \right\}$; c) A = R ; d) A = $\left\{ z \in C / |z| = \frac{1}{4} \right\}$; e) A = $\left\{ z \in C / |z| = \frac{1}{2} \right\}$.

6) Daca $\frac{\lg x}{\lg \sqrt{10}} - \lg y = \lg(x+2y)$, atunci valoarea raportului $\frac{x}{y}$ este:

a) -1 ; b) 3 ; c) 2 ; d) 1 ; e) $-\frac{1}{2}$.

Subiectele I1)-I6) au cate 9 puncte fiecare.

II. La subiectele 1) si 2) se cer rezolvarile complete:

1) (18 puncte) Fie in plan punctele M_1 si M_2 de afixe z_1 si $z_2 \in C$ astfel incat $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$.

a) Demonstrati ca $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$.

b) Calculati aria triunghiului M_1OM_2, daca $|z_1| = 2$ si $m(\sphericalangle OM_1M_2)$ = 30^0.

2) (18 puncte) Demonstrati ca : $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot ...... \cdot \log_{2010} 2011 \notin$ Q.

Se acorda 10 puncte din oficiu. Timp de lucru 2 ore si 30 min. SUCCES!

Colegiul Tehnic “Elie Radu”, Ploieşti

Concursul de matematică “Elie Radu”

Ploieşti, 04.12.2010

ELIE RADU (1853-1931)
Pedagog, academician şi inginer român

Clasa a XI-a

I. Pentru problemele 1-6 precizaţi varianta de răspuns corectă:

1. (10p) Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ şi suma $S=I_2+A+A^2+A^3+\dots+A^{2010}$. Atunci S este:

   a) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; e) alt răspuns.

2. (10p) Coeficientul lui x^3 din dezvoltarea $(1+x+x^2)^{20}$ este:

   a) 1 ; b) 1518 ; c) 1520 ; d) 1140 ; e) alt răspuns.

3. (10p) Dacă [x] este partea întreagă a lui x, atunci $\lim_{x\to 2}[x]$ este:
   a) 0 ; b) 1 ; c) 2 ; d) 3 ; e) alt răspuns.

4. (10p) Numărul elementelor mulţimii $\left\{A=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix} \mid A^2-4A+13I_2=O_2\right\}$ este:

   a) 1 ; b) 2 ; c) 3 ; d) 4 ; e) alt răspuns.

5. (10p) Dacă $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x-1}-ax-b\right)=0$, atunci $a+b$ este:
   a) 2 ; b) 3 ; c) 4 ; d) 5 ; e) alt răspuns.

6. (10p) Valoarea maximă a funcţiei $f: D\to\mathbb{R}, f(x)=C_{8x}^{x^2+12}$ este:

   a) 35980 ; b) 35960 ; c) 36032 ; d) 2024 ; e) alt răspuns.

II. Scrieţi rezolvarea completă:

1. (15p) Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\end{pmatrix}$ şi $B=(b_{11}\quad b_{12}\quad b_{13})$ cu $a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12}+a_{31}b_{13}=3$

   Să se determine matricea $(A\cdot B)^n,\ n\in\mathbb{N}^*$.

2. (15p) În reperul cartezian xOy se considera punctele $A(-2,0),\ B(5,4),\ C(3,-3)$ şi punctele $M\in(BC),\ N\in(AC),\ P\in(AB)$ astfel încât $\frac{MB}{MC}=\frac{1}{3}$, $\frac{NA}{NC}=\frac{1}{2}$ şi $\frac{PA}{PB}=\frac{3}{2}$. Arătaţi că dreptele $AM,\ BN$ şi CP sunt concurente.

Succes!

Colegiul Tehnic “Elie Radu”, Ploieşti

ELIE RADU (1853-1931)
Pedagog, academician şi inginer român

Concursul de matematică “Elie Radu”

Ploieşti, 04.12.2010

Clasa a XII-a

III. Pentru problemele 1-6 precizaţi varianta de răspuns corectă:

7. (10p) Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se consideră legea $x * y = 2xy - 3x - 3y + 6$. Câte elemente sunt simetrizabile în raport cu legea dată:
   a) 1 ; b) 2 ; c) 3 ; d) 4 ; e) o infinitate .
8. (10p) Mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 3(x+1), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ este:
   b) $\{2\}$; b) $\{-3, 3\}$; c) $\{-\sqrt{3},\ 1,\ \sqrt{3}\}$; d) $\{1\}$; e) alt răspuns .
9. (10p) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x + x,\ a > 1$. Atunci $(f^{-1})'(a+1)$ este:
   a) $\frac{1}{a\ln a+1}$; b) $\frac{1}{a+1}$; c) $\frac{1}{\ln a}$; d) $\frac{1}{\ln a+1}$; e) alt răspuns.
10. (10p) Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie $x * y = ax - by - 2010$. Ştiind că $(\mathbb{R},\ *)$ este grup cu elementul neutru e atunci suma $a + b + e$ este:
   a) 2010 ; b) 3 ; c) -2010 ; d) 0 ; e) alt răspuns.
11. (10p) Dacă $F: (0, \infty) \to \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} (\ln x)^3, & x \in (0, e] \\ ax + b, & x > e \end{cases}$ este primitiva unei funcţii atunci $a \cdot b$ este:
   a) $\frac{6}{e}$; b) $-6e$; c) $2e$; d) $\frac{-6}{e}$; e) alt răspuns.
12. (10p) Fie $I = \int e^{2x^2 + \ln x}\, dx,\ x \in (0, \infty)$. Atunci:
   a) $I = \frac{e^{x^2}}{4} + C$; b) $I = \frac{e^{2x^2}}{4} + C$; c) $I = \frac{e^{x^2+1}}{4} + C$; d) $I = \frac{e^{2x^2}}{2} + C$; e) alt răspuns.

IV. Scrieţi rezolvarea completă:

2. (15p) Se consideră mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}$.
   a) Să se arate că M este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu înmulţirea matricelor.
   b) Să se demonstreze că $(M,\ \cdot)$ este monoid;
   c) Să se determine elementele inversabile şi inversele lor.
3. (15p) Se consideră şirul de integrale $I_n = \int x^n e^x\, dx,\ x > 0,\ n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Determinaţi I_0 şi I_2 ;
   b) Să se determine o relaţie de recurenţă pentru calcularea lui I_n.

Succes!